Revista Eletrônica da
Área da Educação
ISSN2316-7297
Volume 8, Número 1
Junho de 2019

sala de aula em foco

REVISTA ELETRÔNICA

EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Revista Eletrônica da
Área da Educação
ISSN2316-7297
Volume 8, Número 1
Junho de 2019

sala de aula em foco

REVISTA ELETRÔNICA

EDUCIMAT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

EDITORIAL

Sandra Aparecida Fraga da Silva[1]
Instituto Federal do Espírito Santo/ Campus Vitória

Apresentamos mais um número da *Revista Sala de Aula em Foco*, publicado em junho de 2014. Este fascículo foi composto de textos envolvendo Educação Matemática com propostas desenvolvidas em diferentes locais e em níveis de ensino diversos, incluindo ensino fundamental, médio e superior. A Educação Matemática como campo de pesquisa está ampliando discussões sobre o processo de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática. Defendemos que precisamos repensar e refletir sobre este processo visualizando possibilidades a partir das ações decorrentes da sala de aula, vista aqui, como espaço propício de pesquisa. Pretendemos que a partir do presente número desta revista várias discussões possam ser realizadas por diferentes professores e profissionais que se preocupam com a educação matemática.

Iniciamos com o artigo intitulado **Uma experiência metacognitiva na Eja**, escrito por Euléssia Costa Silva e Maria Auxiliadora Vilela Paiva. O mesmo apresenta uma experiência realizada com alunos jovens e adultos do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Jovens e Adultos (PROEJA) do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES) *Campus* Vitória. Destaca a importância do trabalho com o erro na perspectiva do diálogo em aulas de matemática para ajudarem os alunos a desenvolverem uma consciência metacognitiva em relação aos seus conhecimentos em matemática.

O segundo artigo foi escrito por Alexsandra Senna que dissertou sobre uma experiência em sua própria turma de 3º ano do ensino fundamental destacando **Possibilidades pedagógicas com geometria nos anos iniciais.** Essa experiência aponta diferentes atividades sobre geometria desenvolvidas em parceria com licenciandos envolvidos no Programa de Iniciação à Docência (Pibid) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). O relato aponta que o trabalho com diferentes metodologias contribui para o envolvimento dos alunos e, no caso da geometria, a disponibilidade de materiais coopera para esse tipo de ação e para a aprendizagem.

Na sequência, apresentamos um recorte de uma dissertação de mestrado. Esse artigo está intitulado por **Atividades de investigação matemática** e foi escrito por Messenas Miranda Rocha e Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. O texto aponta recortes sobre atividades de resolução de problemas e de investigação matemática em uma turma de ensino médio a partir de uma tarefa investigativa

[1] Professora Doutora do Instituto Federal do Espírito Santo. Atua no Mestrado Profissional em Educação de Ciências Matemática – Educimat – e na Licenciatura em Matemática. sfraga@ifes.edu.br

envolvendo sequência numérica escrita de maneira organizada. Ao trazer resposta de dois alunos os autores mostram como esse tipo de atividade contribui para uma aprendizagem de matemática com uma metodologia aberta, ressaltando possibilidades de outros questionamentos a partir dessa proposta.

No quarto artigo, **Poliedros estrelados e origami: uma experiência na formação de professores** escrito por Thais Helena Nakassima Morosini e Julia Schaetzle Wrobel, vemos uma experiência com licenciandos de matemática. Após trabalhar alguns conceitos geométricos necessários para a construção dos sólidos com origami foi realizada a oficina de dobraduras. Notou-se que essa estratégia encanta e contribui para aprendizado de diferentes conceitos geométricos e, em especial, de poliedros estrelados.

Como resultado de discussões e aprendizagens em grupo de estudos o relato **Aprendizagens de professoras construídas em grupo de estudo de matemática,** é apresentado por Bernadete Verônica Schaeffer Hoffman, Sheila Rohr de Souza e Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner. As autoras apontam como desenvolveram uma avaliação diagnóstica que contribuiu para um trabalho posterior de multiplicação e divisão com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Destacam como reflexões e aprendizagens no grupo o qual participam influenciam em ações em suas aulas de matemática.

Na sequência, Angélica Bergamini Giostri e Sandra A. Fraga da Silva relatam uma experiência envolvendo **Visualizações e construções de sólidos geométricos no ensino médio** realizada numa escola parceira do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid – subprojeto matemática do Ifes Vitória. As construções de cascas e de esqueletos de sólidos geométricos com uso de materiais concretos contribuem para a visualização e é apontado pelas autoras como importante para o processo de ensino e aprendizagem de geometria por propiciar discussões acerca do assunto.

O sétimo artigo intitulado T**écnicas de dissecção na demonstração do teorema de Pitágoras: Euclides e Leonardo da Vinci** escrito por Rodolfo Chaves e Caio Lopes Rodrigues traz experiência de pesquisas do grupo de estudos Gepemem/Ifes. O texto é fruto de investigações desenvolvidas no Laboratório de Práticas de Ensino Integradas – LIFE e tem como proposta tratar de forma interativa e manipulativa o teorema de Pitágoras abordando historicamente a demonstração por dissecção adotada pelos pitagóricos e também por Leonardo Da Vinci. Enfatiza possibilidades de abordagens diferenciadas de Matemática e História da Matemática na sala de aula utilizando o teorema de Pitágoras.

O último capítulo foi escrito por Grazzielly Mazzarim Bernades, Camila dos Santos de Souza e Carla Silva Zandonade e tem por título **A construção do conceito de área por meio de atividades investigativas: uma experiência com**

paralelogramos no PIBID/IFES. Trata-se de uma atividade investigativa desenvolvida com alunos de 1º ano do ensino médio de uma escola estadual de Vitória/ ES parceira do Pibid, subprojeto matemática. A Geometria foi trabalhada a partir da investigação em malha quadriculada sobre paralelogramos para que os alunos criassem significados para o conceito de áreas e perímetros, por meio da construção das figuras planas conhecidas. Os alunos mostraram-se interessados e mudaram de comportamento a partir da atividade.

Desejamos que os leitores aproveitem os relatos sobre educação matemática e se sintam motivados a experimentarem em suas salas de aulas algumas destas propostas com diferentes experiências.

UMA EXPERIÊNCIA METACOGNITIVA NA EJA

Euléssia Costa Silva[1], Maria Auxiliadora Vilela Paiva[2]
Instituto Federal do Espírito Santo

Resumo: Descrevemos uma experiência numa turma de PROEJA como um recorte de uma pesquisa que foi desenvolvida em 2012 no IFES - Vitória. O foco é dado na importância do erro e do diálogo para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática e consequentemente no desenvolvimento metacognitivo desse aluno. Trata-se de uma turma heterogênea que trouxe várias experiências, como toda turma do EJA, em especial essa, composta por jovens e adultos trabalhadores. O conteúdo matemático trabalhado de forma dialogada permitiu a identificação de crenças e conceitos errados já arraigados e a desconstrução dos mesmos pelos próprios alunos.

Palavras-chave: metacognição. EJA. ensino-aprendizagem.

Introdução

A relação entre o que é ensinar e aprender é amplamente discutida no que se refere ao triângulo professor-aluno-saber e compreender como ocorre essa relação é fundamental no processo de ensino-aprendizagem.

Uma das questões apontadas é a participação ativa dos alunos, na construção do seu próprio conhecimento principalmente por meio do diálogo na sala de aula. Segundo Esteban (2006) a interação dialógica nos permite novos olhares a partir da percepção do outro, fortalecendo assim, nossa criatividade, subjetividade e nossa consciência crítica.

O que ocorre, no entanto é que ainda não há um trabalho dialógico nas salas de aula como um todo, principalmente quando diz respeito ao erro. Segundo Cury (2007),

> o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos, passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? [...] A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como metodologia de ensino se for empregada em sala de aula, [...], partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento. (CURY, 2007, p. 13)

Trabalhar essas questões em uma turma da Educação de Jovens e Adultos (EJA) é muito importante, ao se levar em consideração que esses alunos já possuem uma experiência de vida tanto pessoal quanto escolar. Identificar as deficiências e as crenças já arraigadas ao longo desse processo contribui para o processo de ensino-aprendizagem, nesse caso específico no que diz respeito à Matemática.

[1] eulessiac@gmail.com
[2] vilelapaiva@gmail.com

No desenvolvimento desse trabalho recorremos a autores como Barth (1993), Esteban (2006), Cury (2007), Skovsmose (2002), Ferreira e Paiva (2011), no sentido de embasarem e contribuírem com essas discussões.

Com o objetivo de entender melhor a relação entre o professor e os alunos da EJA e o modo como conduz a aula objetivando não só o ensino do conteúdo mas o desenvolvimento metacognitivo de seus alunos por meio do diálogo, optamos para a observação dessa práxis em uma turma do Programa Nacional de Integração da Educação Profissional com a Educação Básica na Modalidade de Jovens e Adultos (PROEJA) do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES).

A metacognição e o erro

Ao analisarmos o ambiente escolar devemos levar em consideração alguns fatores, principalmente os relacionados ao ensino-aprendizagem, isto é, o professor, os alunos e as situações-problema. Quando limitamos a nossa visão no ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos, voltados para o trabalho com os alunos da EJA, devemos considerar que temos alunos jovens e alunos trabalhadores que se reúnem, para aprender o que muitas vezes não conseguiram ou rever conteúdos que há muito já foram vistos. Esses fatores têm que ser levados em consideração ao analisarmos suas dificuldades, crenças e medos diante de uma situação-problema. Como professores devemos compreender que o importante não é somente o que nossos alunos sabem e/ou sabem fazer, mas que *"reflitam sobre o que sabem, o que sabem fazer e o que fazem"* (VILA e CALLEJO, 2006, p35).

O professor precisa trabalhar o erro do aluno de forma a instigá-lo, a questionar o modo que resolveu a atividade, não apontando o erro diretamente, mas fazendo com que esse aluno "quebre" a sequência lógica construída por ele fazendo com que o mesmo "reconstrua" o caminho percorrido e, consequentemente, o conceito.

Ao fazer esse tipo de processo o aluno passa a analisar o próprio aprendizado, e passa a regular seu conhecimento, o que contribui com o seu desenvolvimento metacognitivo. Para que isso ocorra é necessário muitas vezes a quebra ou a desestabilização de certas crenças construída ao longo da vida escolar. A metacognição é definida por Nickerson, Perkins e Smith apud Portilho (2009),

> Metacognição é o conhecimento sobre o conhecimento e o saber, incluindo o conhecimento das capacidades e das limitações dos processos do pensamento humano; do que se pode esperar que os seres humanos saibam em geral; e das características das pessoas em si, em especial, de si mesma como conhecedora pensante. Esse conhecimento inclui a capacidade de planejar e regular o emprego eficaz dos próprios recursos cognitivos (Nickerson, Perkins e Smith apud PORTILHO, 2009, p. 107).

Esteban (2006) ressalta a importância da escola na articulação entre o processo de ensino-aprendizagem e o sucesso escolar, principalmente dos sujeitos das classes populares que são as mais atingidas pelo fracasso escolar e consequentemente pela exclusão social. Borasi (1996) apud Cury (2007) afirma que a escola pressiona os alunos, apontando que os erros cometidos por eles são frustrantes, e que os levam a perderem tempo na tentativa de evitar a reprovação. Cury (2007) aponta um caminho a seguir em relação ao erro,

> Ao enfocar a noção de obstáculos e aproximá-la da ideia de erro, outro ponto importante a considerar é que o obstáculo é um conhecimento. Assim sendo, o aluno constrói esse conhecimento relacionando-o com outros, em diferentes contextos, tentando adaptá-los às novas situações e resistindo a abandoná-los. É por esse motivo que se torna tão difícil superá-lo, já que, para isso o aluno (e o professor, por suposto) terá de trabalhar da mesma forma que o faz quando da construção de um novo conhecimento, com o agravante de que o "falso" saber (aquele que funcionava bem no contexto anterior) estará, ainda, por trás da nova construção (CURY, 2007, p.35).

Pensando nessa questão relacionada ao erro e principalmente na dificuldade que muitos alunos possuem e no medo de errar na presença dos colegas, devemos estabelecer um processo de ensino-aprendizagem que:

> Compreende ações conjuntas do professor e dos alunos pelas quais estes são estimulados a assimilar, consciente e ativamente, os conteúdos e os métodos, de assimilá-los com suas forças intelectuais próprias, bem como a aplicá-los, de forma independente e criativa, nas várias situações escolares e na vida prática (LIBÂNEO, 1990, p. 78).

Estimular as participações e o diálogo na sala de aula é importante, principalmente por facilitar a identificação dos conceitos mal formados, ou erroneamente construídos que possam prejudicar o desenvolvimento desse aluno. Porém é importante não apontar o erro ou a definição, mas fazer com que esse aluno perceba por si só. O professor quando instiga o aluno a buscar a resposta, a ter um olhar crítico e a participar do processo de sua própria aprendizagem, estará trabalhando de modo a auxiliá-lo a desenvolver sua metacognição.

Ao analisar as questões levantadas, voltadas ao processo de aprendizagem do aluno adulto, identifica-se que o trabalho de desconstrução do erro é primordial para um aprendizado em Matemática considerando que esses sujeitos já possuem um conhecimento prévio, e que nem sempre foi construído de forma correta, e, consequentemente contribuem para o desenvolvimento metacognitivo desse aluno.

As observações em sala de aula, da EJA, que se seguem foram pautadas nessas teorias.

Relato da observação

As observações aqui relatadas foram realizadas na turma do primeiro módulo do curso de Edificações do PROEJA/IFES referente ao primeiro período do ano de 2012. A classe é formada por quarenta alunos jovens e adultos trabalhadores assíduos, com a questão de gênero é equilibrada, considerando que há pouca diferença entre homens e mulheres. O número excessivo de alunos dificulta o trabalho em grupo e individual.

Sabemos que cada turma tem suas características, e ao acompanharmos de perto a turma do PROEJA, identificamos que muitos desses alunos permaneceram fora da Escola por um longo período, sendo que dois desses ficaram um período de quase 30 anos. Constatamos que o retorno aconteceu não só por questões econômicas e aperfeiçoamento profissional, mas também por realização pessoal. Porém, muitos desses retornaram com algumas dificuldades relacionadas à Matemática, à escrita ou à interpretação de texto. Desenvolver estratégias que permitiram resgatar alguns conceitos já estudados por esses alunos e trabalhar para que construíssem novos conceitos, partindo de suas experiências vivenciadas na escola e no trabalho, faz-se necessário, lembrando sempre que a maioria eram adultos trabalhadores.

As observações feitas possibilitaram a identificação de alguns fatores importantes para o trabalho em sala de aula tais como, o diálogo, a análise de erro e os conhecimentos prévios.

Durante as aulas percebemos que o professor estimulava a participação dos discentes durante a explicação e realização das atividades propostas por ele. Instigava, perguntava, dialogava, e procurava induzir a turma a discutir em conjunto as definições, estabelecendo relações entre as ideias apresentadas em busca de uma melhor aprendizagem. Segundo Skovsmose (2002),

> a aprendizagem é pessoal, mas tem lugar nos contextos sociais das relações interpessoais. Assim, a facilitação da aprendizagem depende da qualidade do contato na relação interpessoal que emerge a partir da comunicação entre os participantes. Em outras palavras, o contexto no qual as pessoas se comunicam afeta o que é aprendido por ambas às partes. (SKOVSMOSE, 2002, p.2).

O diálogo está presente em diferentes aulas o que segundo o professor não só estimula a participação dos alunos como também, identifica os erros construídos por eles. Em uma aula o professor solicitou aos alunos que levassem a calculadora que eles tivessem em casa, com o objetivo de trabalhar determinados conteúdos matemáticos por meio dessa tecnologia presente em nosso dia a dia.

No exercício do material, utilizado pelos alunos, apontava que uma calculadora normal considerava até oito casas. O professor solicitou que todos os alunos dividisse 2 por 7 e Verônica observou que a dela só considerava até seis casas. Os outros alunos começaram a analisar seu próprio instrumento surgindo assim algumas dúvidas, tais como: “Eu não entendi por que a minha calculadora mostra apenas sete dígitos e vai diminuindo sucessivamente”; “Se me pedirem para dividir algum valor será que minha calculadora será suficiente?”. Após várias discussões em relação à quantidade de dígitos, chegou-se a conclusão que dependendo do caso será necessário uma calculadora mais eficiente para obter uma melhor aproximação racional dessa divisão proposta.

O professor solicitou que os alunos multiplicassem 2 vezes 7, e um deles respondeu que dava como resultado 14. O professor então perguntou o que isso significava e, Juca disse que representava 7 duas vezes (7+7=14) ou o 2 sete vezes (2+2+2+2+2+2+2=14). Toda a turma foi testando as duas situações, confirmando a afirmação do colega. No entanto, apesar de dar o mesmo resultado, pois a ordem dos fatores não altera o produto, sabemos que como situação problema são distintos. Verificamos que não houve uma discussão mais detalhada sobre esse assunto.

Dando continuidade à aula, o professor instigando a turma, colocou no quadro 2^{10}, dois elevado a dez, questionando o que isso significava. O aluno Pedro afirmou que 2^{10} = 2x10 = 20x2 = 40. O professor questionou então, quantos alunos concordavam com isso. O aluno João se manifestou contrário e afirmou, porém que significava que o 2 deveria ser multiplicado 10 vezes (2x2x2x2x2x2x2x2x2x2 = 1024). Em meio à discussão e mediação do professor, os próprios alunos chegaram ao consenso que o raciocínio de Pedro estava correto, inclusive o próprio João que refez a sua solução. Para finalizar o professor colocou no quadro o conceito de Potenciação construído junto com os alunos.

Novamente o docente solicitou que a turma utilizasse a calculadora para obter o resultado de 2^{10}. João em dúvida olhou e questionou como poderia realizar a conta se não existia essa opção no seu instrumento. Bruno depois de fazer alguns testes, afirmou para a turma que a calculadora comum não teria como resolver a potência direto, e é só multiplicar 2 vezes 2 (2x2) e depois apertar o sinal de "=", nove vezes.

Essas aulas nos mostraram que quando esses alunos adquirem uma postura que os tornam responsáveis pelo processo de aprendizagem, e começam indagar e procurar explicações, eles se tornam mais críticos, passam a questionar o próprio aprendizado, autorregulando o seu conhecimento, desenvolvendo assim sua metacognição. Essa construção é muito importante, uma vez que

> o aluno deve ele próprio construir o seu saber, mobilizando as ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construí-lo. [...] esta aquisição diz igualmente respeito à maneira como a saber utilizar, o pensamento e a reflexão, a inteligência em si, no centro da aquisição de conhecimentos. Assim, o modo de aprender torna-se tão importante como aquilo que aprendemos, pois influencia de maneira decisiva a qualidade dos conhecimentos adquiridos (Barth, 1993, p. 22 e 23).

Portanto, observa-se que essa troca de experiência em uma turma heterogênea, considerando a diferente faixa etária e a história de vida de cada indivíduo presente na sala de aula, constitui um campo rico de troca e construção de saber. Ao perguntar alguns alunos sobre como viam a participação da turma a aluna Isabel, falou "Eu acho bom que tem uma troca", e Helena completou a fala da colega e disse:

> Acho que quando estamos mais maduros, sei lá, não sei o que passa na cabeça dos jovens, se tem vergonha ou é medo. Hoje em dia não, a gente diz

> não entendi, explica. E eles (professores) explicam. É ótimo, uma turma assim. Fica uma turma mais centrada, não é uma turma bagunceira.

Estimular essa troca em sala de aula por meio do diálogo e participação é importante, mas depende muito do professor e isso para ele nem sempre é uma tarefa fácil.

Apesar das dificuldades apresentadas por alguns alunos em relação a conteúdos básicos, não só matemáticos, mas também em relação à escrita, identificamos que houve assimilação e aprendizagem do conteúdo "Potenciação". Afirmamos isso quando identificamos que os alunos ao participarem, apresentaram suas dúvidas, suas dificuldades e apontaram os erros relacionados à sua aprendizagem. No entanto, quando isso ocorreu o professor identificou os principais problemas da turma e por meio do diálogo foi auxiliando a turma a construir e dar sentido ao conteúdo discutido. Apenas ao final das discussões o professor foi ao quadro e formalizou o conteúdo estudado.

Identificamos também que os conhecimentos prévios desses educandos permearam as discussões em sala de aula, enriquecendo o aprendizado por meio dessa troca de experiências, e consequentemente, contribuindo com o desenvolvimento metacognitivo.

Outro fator a ser destacado é que alguns alunos apontaram que a forma de ensino utilizada pelo professor é diferente daquelas que estavam acostumados a ter. Eles destacaram que por meio do trabalho desenvolvido em sala de aula aprenderam a questionar, a interpretar dados numéricos em textos, a identificar sua aplicação e a importância em diferentes contextos.

Consideramos também que ao debater esses conceitos o professor auxilia o aluno a refletir, a partir do seu próprio questionamento e da fala e questionamento dos outros colegas, identificando o que sabe e o que não sabe. Dessa maneira o aluno pode construir uma aprendizagem por meio de uma análise crítica sobre seu conhecimento, identificar suas próprias dificuldades e erros e, consequentemente desenvolver seu processo metacognitivo.

Considerações finais

Inferimos que um trabalho em sala de aula baseado no diálogo entre professor e aluno e entre alunos, pode inibir o medo de errar e também pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento das habilidades metacognitivas dos alunos.

As observações dessas aulas contribuíram também para nosso crescimento pessoal e para nossa prática docente, pois permitiram que avaliássemos nosso próprio trabalho. Concluímos ainda, que quando há troca de experiências, valorização do conhecimento prévio e principalmente respeito ao outro, vontade de aprender e estímulo para que isso ocorra haverá um ambiente propício para que os alunos não tenham tanto medo de errar, e consequentemente contribua ainda mais com o desenvolvimento metacognitivo desses alunos. O professor, como um dos vértices do triângulo pedagógico, nesse caso, adquire papel de fundamental importância no sentido de estimular atitudes positivas e de interação em sala de aula, dialogar e mediar o aprendizado desse aluno como ações indispensáveis para a construção do conhecimento e autonomia desse educando.

Referências

BARTH, B, M. **O Saber em Construção:** para uma pedagogia da Compreensão. Portugal: Instituto Piaget, 1993.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. São Paulo: Autêntica, 2007.

ESTEBAN, M. T. **O que sabe quem erra?** 4ª ed. Rio de Janeiro: DP & A Editora, 2006.

FERREIRA, M. J. DE R.; PAIVA, M. A. V. **Refletindo e Organizando o trabalho Pedagógico na EJA e no PROEJA.** Vitória: Ifes, 2011.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1990.

PORTILHO, E. M. L.. **Como se aprende? Estratégias, estilos e metacognição**. Rio de Janeiro: Wak, 2009.

SKOVSMOSE, O. Tradução de Orlando de Andrade de Figueiredo. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática:** Incerteza, Matemática, Responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2002.

VILA, A. e CALEJO, M. Luz. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

POSSIBILIDADES PEDAGÓGICAS COM GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS

Alexsandra Senna[1]
Programa de Pós-Graduação em Educação
Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo
Prefeitura Municipal de Vitória

Resumo: Neste texto relatamos um trabalho envolvendo conhecimentos elementares de geometria. Os conhecimentos básicos da geometria são referentes ao senso espacial que a criança começa a perceber pelas relações topológicas a que é estimulada, noções de vizinhança, contorno. Diferenciam figuras fechadas das figuras abertas, dentro, fora, maior, menor, quando reconhecem posições numa sequência. O trabalho foi desenvolvido em abril/maio de 2011 na Rede Municipal de Vitória-ES, na turma de 3º ano do ensino fundamental em parceria com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência/ PIBID/UFES. Esta experiência contribuiu para que os alunos construíssem o pensamento lógico-matemático de forma organizada, integrado ao convívio sociocultural e fornecendo elementos básicos para que os conhecimentos matemáticos fossem potencializados. Tendo o Documento Orientador do Ciclo Inicial de Aprendizagem da Secretaria Municipal de Educação de Vitória como referência para os trabalhos, elegemos alguns conteúdos para serem desenvolvidos com os alunos numa perspectiva lúdica e contextual. Concluiu-se que crianças podem e devem aprender os conceitos geométricos elementares de um jeito que possa apreciar a geometria no mundo real, reconhecendo as formas geométricas no seu meio.

Palavras-chave: pensamento lógico-matemático. conhecimentos matemáticos. geometria. trabalho pedagógico. Pibid.

INTRODUÇÃO

O tema "Possibilidades pedagógicas com geometria nas séries iniciais" está relacionado com a indicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) em se trabalhar o conteúdo no 1º Ciclo de Aprendizagem. Para ilustrar a posição dos PCN (ibid) selecionamos uma de suas colocações onde aponta que

> a geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 2000, p.35).

Por meio das observações que fiz ao longo de minha experiência profissional pude perceber que há muita resistência por parte de alguns alunos em estudar Matemática. Essa atitude frente ao objeto de estudo matemático delimita o comportamento posterior dos sujeitos da aprendizagem, de acordo com Gómez Chacón (2003)

[1] Mestranda em Educação e professora da Rede Municipal de Ensino de Vitória-ES/Supervisora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – Pibid/Ufes. alexsandrasenna@gmail.com

> As atitudes em relação a matemática referem-se a valorização e ao apreço desta disciplina, bem como ao interesse por essa matéria e por sua aprendizagem, sobressaindo-se mais o componente afetivo do que o cognitivo; o componente afetivo manifesta-se em termos de interesse, satisfação, curiosidade, valorização, etc (GOMEZ-CHACÓN, 2003, p.21).

Constatei também que nós, educadores, por muito tempo deixamos para ensinar geometria perto de findar o ano letivo seguindo os livros didáticos de matemática visto que este conteúdo se localizava no final do livro. Contemplamos como hipótese a pouca instrução que os professores tinham em trabalhar os conhecimentos geométricos. Diante do tempo reduzido não era possível aprofundar-se e poucas construções eram demonstradas, ficando o aluno sem aprender consistentemente os conhecimentos geométricos.

Pavanello (1993) corrobora com a afirmativa acima relatando que "muitos reservavam o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula – talvez numa tentativa ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão" (p.7). Entretanto, temos notado que isto vem mudando. Atualmente, os autores dos livros didáticos tem procurado dar uma valorização maior ao conteúdo de geometria confirmando a importância deste conhecimento para o currículo de matemática.

Buscando ampliar possibilidades de trabalhar matemática, ingressei em um grupo de estudos[2] em 2011 formado por professores da educação básica, do ensino médio e superior que tem como objetivos refletir sobre as práticas pedagógicas em sala de aula, estudar e discutir estratégias de ensino e autores que abordam educação matemática, desenvolver o hábito de registrar a própria prática, contribuindo para uma reflexão crítica da própria prática e para sua formação profissional.

Assim, em trocas de experiências e em estudos nesse grupo buscamos ferramentas que auxiliassem os sujeitos envolvidos no processo de ensino quanto à compreensão do que é matemática, em especial a geometria. O uso de diferentes recursos metodológicos tem como objetivo despertar no aluno o interesse, a capacidade de argumentação e de investigação, em contraposição a um ensino de geometria baseado apenas em demonstrações de figuras e teoremas.

É, portanto, dentro desse espaço de necessidade de trabalhar geometria nas séries iniciais, que se apresenta este projeto de prática, cujo problema foi formulado na questão central:

Que contribuições a geometria oferece ao desenvolvimento do sujeito em perceber, investigar e explorar os objetos do mundo físico?

Perspectivas teóricas

A geometria num primeiro momento pode ser vista como imagens que se percebem através dos movimentos; portanto, devemos dizer que a primeira geometria é constituída pelo corpo. O espaço para a criança vai tomando forma e sendo elaborado de acordo com as explorações que a criança faz do mundo que a rodeia.

Os autores Smole, Diniz e Candido (2000) fundamentam esta questão dizendo que "a criança organiza a relação corpo-espaço, verbaliza-a e chega assim a um corpo orientado que lhe servirá de padrão para situar os objetos colocados no espaço ao seu redor" (p.11). Portanto, a percepção do espaço a criança a princípio o faz através do movimento de seu

[2] O Grupo de Estudos em Educação Matemática do ES, GEEM-ES, se reúne semanalmente desde 2006 na Universidade Federal do Espírito Santo sob a coordenação da professora Vânia Maria Pereira Santos-Wagner. Em 2012, os encontros do grupo ocorrem todas as terças-feiras, a partir das 18h30, no IFES campus Vitória.

próprio corpo para, posteriormente, percebê-lo com os olhos e, em seguida, analisá-lo mentalmente.

A geometria é uma área da matemática que estuda as formas, planas e espaciais e suas propriedades. Sua origem está intimamente ligada à necessidade de melhorar o sistema de arrecadação de impostos de áreas rurais e da necessidade prática de fazer novas medidas de terras sendo os egípcios na antiguidade a darem os primeiros passos para o desenvolvimento desse conhecimento. A importância de ensinar geometria é pelo fato de que, "um indivíduo, sem este conteúdo nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda o raciocínio visual" (LORENZATO, 1995, p.12).

Vale destacar que a posição que a geometria vem resgatando no currículo escolar pode contribuir com que alunos e professores aprendam conhecimentos pertinentes à vida. Colaboram com nosso comentário os autores Abrantes (1999) e Smole, Diniz e Candido (2000) quando afirmam que a geometria deve estar essencialmente relacionada à compreensão do espaço pela criança porque ela exige uma maneira específica de raciocinar, relacionar-se, conquistar, explorar e descobrir. Estes são fatores que desempenham importante papel na concepção de espaço pela criança.

Abrantes (*ibid*) enfatiza a estreita ligação da geometria com as tarefas exploratório-investigativas que, pela intuição, visualização e manipulação de materiais, é uma área propícia a descobertas e resolução de problemas, que podem ocorrer desde os primeiros níveis de escolaridade. Como apontam Pires, Curi e Campos (2001), através da geometria é possível compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivemos.

O professor deve oferecer formas didáticas diferenciadas, como atividades lúdicas para que a criança sinta o desejo de pensar logicamente. Isto significa que ela pode não apresentar predisposição para gostar da disciplina e, por isso, não se interessar por ela.

Desenvolvimento

Elaboramos uma sequência didática em que foram necessárias oito horas-aula no período de abril/maio de 2011 distribuídas em seis atividades. As atividades propostas foram de caráter exploratório-investigativas que abordavam conteúdos geométricos tais como: figuras planas e figuras não planas, planificação de figuras espaciais, simetria, composição e decomposição de figuras.

Fiorentini e Lorenzato (2006) concebe as aulas exploratório-investigativas como uma maneira de oportunizar em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de tratamento e significação e que podem, após a exploração e problematização, culminar em investigação matemática caso ocorra à elaboração de questões, conjecturas e a busca pelas suas confirmações ou refutações.

Apresentamos as atividades, seus objetivos e pontuamos considerações sobre as mesmas nos parágrafos que seguem.

1ª atividade

Iniciamos, oportunizando os alunos o manuseio dos blocos lógicos feitos de madeira, para que sentissem suas formas, vértices, e observassem algumas de suas características e comparassem com formas de objetos presentes no ambiente escolar.

Num primeiro momento os alunos livremente bateram as peças sobre a mesa, empilharam peças ou simplesmente passaram as mãos. Caminhando pela sala, alguns alunos iam comparando as peças entre os colegas. Algumas crianças já conheciam os nomes das peças.

De acordo com Piaget a aprendizagem da matemática envolve o conhecimento físico e o lógico-matemático. No caso dos blocos, o conhecimento físico ocorre quando a criança pega, observa e identifica os atributos de cada peça. O lógico-matemático se dá quando a criança usa esses atributos sem ter o material em mãos.

2ª atividade

O segundo passo, foi trabalhar alguns conceitos e nomenclaturas para que os alunos se familiarizassem com as figuras. O objetivo aqui era que percebessem as formas e características de cada sólido. Diante das características observadas, os sólidos foram classificados em grupos: por cores, os que rolam e os que não rolam, por espessura, tamanho, superfícies planas e não planas.

Neste momento as descobertas se ampliaram e detalhes que não haviam sido percebidos na primeira atividade (quantos lados, que formas tem, as características) foram orientadas pela professora.

Com os blocos lógicos é possível desenvolver o raciocínio, a capacidade de concentração e a classificação. Lorenzato (2006) reforça que ao manusear os sólidos os alunos estão construindo as primeiras ideias das operações lógicas como correspondência e classificação. Ao pedir a criança que observe os objetos à sua volta e digam a forma que eles tem comparando as mesmas formas a criança está correspondendo os objetos entre si verificando os mesmos atributos. Uma vez realizada a comparação a criança tem a possibilidade de classificar os objetos com o que eles tem em comum ou o que tem de diferente. Ao classificar os objetos é necessário escolher um atributo e isolar outros. Ou ainda é possível considerar mais de um atributo, seja cor, forma ou tamanho.

3ª atividade

Outra atividade desenvolvida foi a leitura do texto “A História do Pirata” (In: **Nova Escola**, 111 ed., abr. 1998, p.20-23). Cada aluno escolheu uma peça do conjunto de blocos lógicos que foi disponibilizado. À medida que a história ia sendo narrada, as crianças deveriam observar sua peça e mostrá-la de acordo com a classificação solicitada pelo narrador da história (cor, tamanho, espessura e forma).

Textos envolvendo uma linguagem matemática possibilitam com que os alunos percebam novas maneiras de encarar o conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem. Os textos matemáticos servem também para introduzir conhecimentos novos tanto da matemática como da língua escrita.

Apresentamos a história do pirata narrada às crianças:

Era uma vez um pirata que adorava tesouros. Havia no porão de seu navio um baú carregado de pedras preciosas. Nesse porão, ninguém entrava. Somente o pirata tinha a chave. Mas sua felicidade durou pouco. Numa das viagens, uma tempestade virou seu barco e obrigou todos os marinheiros a se refugiarem numa ilha. Furioso, o pirata ordenou que eles voltassem a nado para resgatar o tesouro. Mas, quando retornaram, os marujos disseram que o baú havia sumido. 'Um de vocês pegou', esbravejou o pirata desconfiado. Nesse ponto, começa o jogo com as crianças. Peça que cada uma escolha um bloco lógico. Ao observar as peças sorteadas, escolha uma delas sem comunicar às crianças qual é. Ela será a chave para descobrir o "marujo" que está com o tesouro.

Importante salientar que na turma havia uma aluna com necessidades especiais que se sentia atraída pelas narrativas. Por isso, a professora valoriza a contação de histórias em outras áreas do conhecimento para integrá-la ao contexto que esta aluna é familiarizada.

Após cada narrativa a aluna sente-se estimulada a recontar a história da sua maneira o que faz com riqueza de detalhes.

Após a contação da história os alunos foram direcionados a analisar o quadro que apresentava as características das peças do bloco lógico.

Atributo	Pegou o tesouro	Não pegou o tesouro
Tem a cor azul		
Tem a forma triangular		
Tem tamanho pequeno	P	G
Não tem espessura fina		

Figura 1. Classificação dos blocos lógicos

4ª atividade

Trabalhamos a modelagem dos sólidos com massinha de modelar agrupando os sólidos pelas semelhanças e desenvolvemos atividade de recorte e colagem com os sólidos planificados.

Algumas embalagens de produtos (caixa de sapato, caixa de creme dental, caixa de perfume, latas) foram abertas nos encaixes para que os alunos se familiarizassem com os moldes.

Guimarães, Vasconcelos e Teixeira (2006) reforçam esta atividade salientando que é necessário que as crianças realizem a reprodução de sólidos com moldes, papel, massinha, a fim de que possam descrever e identificar as características e interpretar representações de corpos geométricos.

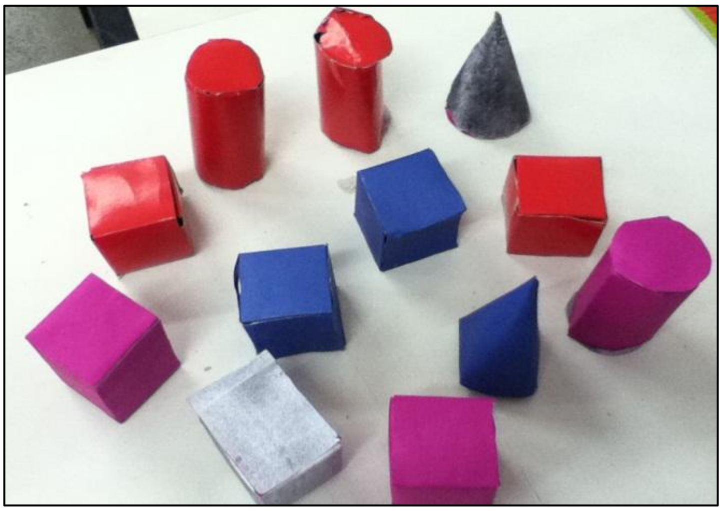


Figura 2. Montagem de sólidos geométricos

Não planejamos atividade para que eles criassem o molde dos sólidos porque acreditamos que seria difícil para crianças nesta faixa etária. Contudo apresentaram bastante dificuldades em recortar as figuras planificadas porque a mesma exigia certa habilidade para o recorte das arestas, dos engates para a colagem. Por isso, houve necessidade que a professora auxiliasse requerendo um tempo maior para esta atividade.

Percebeu-se que diante da dificuldade citada acima, alguns alunos perderam o interesse e solicitaram que a professora ou um colega experiente terminasse por eles. Quando a montagem estava pronta caminharam pela sala para fazer as comparações do mais bonito, mais bem feito, quem conseguiu fazer sozinho e que foi craque em ensinar o outro.

5ª atividade

Outra atividade desenvolvida foi sobre simetria. Utilizamos dicionário para entendermos o significado do termo simetria. Usamos o próprio corpo, diversas figuras visualizadas com espelho para perceber as características de algo simétrico. Também utilizamos as atividades sugeridas no livro didático com geometria, simetria, linhas e curvas. Trabalhamos a construção de figuras simétricas no plano quadriculado, a partir de imagens experienciadas do cotidiano da criança. Foram escolhidas imagens da natureza, barcos, casas. O objetivo era levar a criança a imaginar o complemento da figura apresentada e finalizar a mesma.

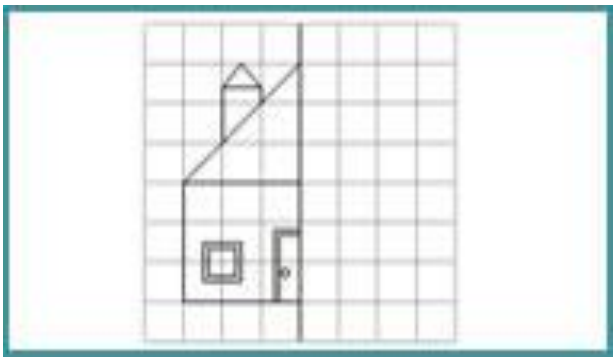


Figura 3. Figura no plano quadriculado

Ao refletirmos sobre algo simétrico geralmente nos vem à mente a ideia do senso estético presente nas construções, nos objetos em nossa volta, as obras de arte, na própria natureza. O mundo em que vivemos é preenchido de simetrias, algumas naturais e outras não.

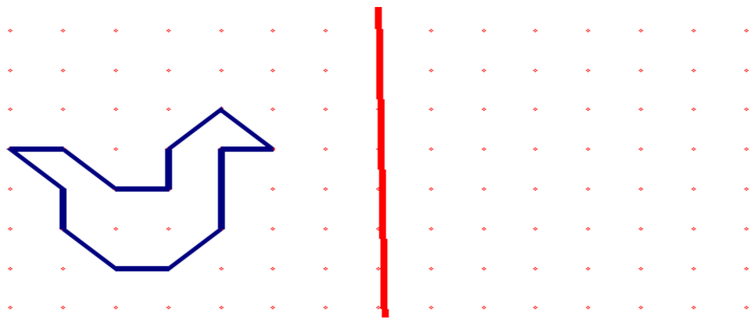


Figura 4. Figura no plano pontilhado

A professora ao tentar reproduzir a atividade da figura 4 na lousa equivocou-se iniciando o traçado da figura aleatoriamente sendo que deveria iniciar a partir do eixo de simetria. Percebendo a confusão somente no final do desenho aproveitou fazendo uma análise do seu erro com os alunos.

Ensinar às crianças a noção de simetria de maneira lúdica possibilita, por exemplo, uma melhor compreensão das figuras geométricas e suas propriedades, ampliando a percepção geométrica do aluno. Isso, por sua vez, nos permite posteriormente trabalhar situações em que nos deparamos com regularidade e padrões que se repetem.

Ao fazermos a dobradura com sucesso da figura 5 com as crianças foi algo que trouxe muita satisfação inclusive para a professora porque se trata de dobraduras que sempre tentamos fazer contudo dificilmente dá certo.

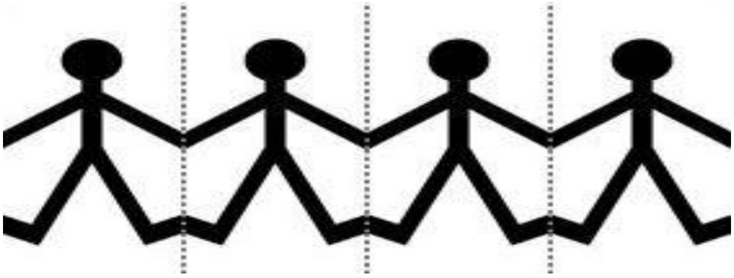


Figura 5. Dobradura e recorte

Em parceria com literatura as crianças elaboraram a criação do cenário da história Romeu e Julieta de autoria de Ruth Rocha fazendo borboletas na perspectiva simétrica (figura). Esta atividade fez parte de um cenário maior da encenação da peça Romeu e Julieta. As crianças criaram o hábito de representar cenários ou desenhos de história, cenas em quadrinhos fazendo sempre alguma dobradura dando preferência as simétricas.

Figura 6. Trabalho com dobradura/simetria

6ª atividade

Contextualizamos a história do Tangram e sua origem e o conto de uma das lendas a respeito.

Apresentamos ao leitor a lenda que foi narrada às crianças:

Conta a lenda do século XII que um jovem chinês recebeu uma missão dada por seu mestre, um monge taoísta: viajar pelo mundo e anotar tudo que visse de belo e depois voltasse. O monge entregou para o jovem um quadrado de porcelana, um rolo de papel de arroz, pincel e tintas. O discípulo ficou tão emocionado com a tarefa que deixou cair o quadrado de porcelana partindo-o em 7 pedaços. O discípulo, tentando reproduzir o quadrado, percebeu uma imensidão de belas e conhecidas figuras feitas a partir das 7 peças. Assim, percebeu que não precisava mais correr o mundo, pois tudo que era belo poderia ser formado pelas 7 peças do tangram.

Essa atividade não foi possível finalizá-la no mesmo dia. Quando retomamos em outro dia planejado esta tarefa estimulamos para que os alunos recontassem a história. Elaboramos algumas questões interpretativas sobre a lenda para que respondessem oralmente e por escrito.

Nomeamos as peças do Tangram (tans) e os alunos foram divididos por gênero (escolha dos próprios alunos) para competirem na formação de figuras com os tans magnéticos. Os tans magnéticos são figuras geométricas imantadas que favorece a criação de figuras num quadro de alumínio. O interesse era que os alunos exercitassem o raciocínio espacial e familiarizassem com as figuras geométricas básicas. Algumas figuras sugestivas de barco, casa, animais foram expostas para os alunos.

Na sequência utilizamos o software GCompris[3] no laboratório de informática que possibilita atividades com tangram na montagem de figuras. De forma divertida os alunos se sentiram estimulados a participarem em duplas na composição das peças. Exigia-se nesta atividade o desenvolvimento da capacidade de ouvir e respeitar a criatividade do colega com quem se formava a dupla além de estimular a criatividade, o desenvolvimento do raciocínio lógico e geométrico.

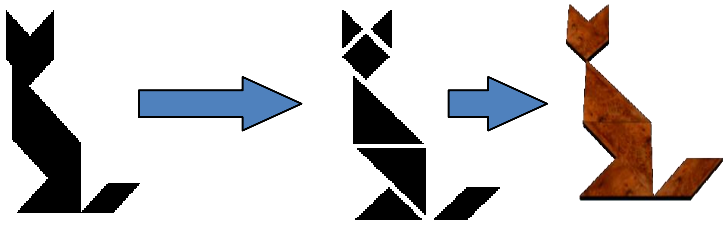


Figura 7. Tangram no Gcompris

As habilidades do raciocínio geométrico envolvem visualização, percepção espacial e análise de figuras. Quando é possível realizar atividades com recursos tecnológicos o aprendizado para as crianças se torna prazeroso e significativo.

Foi possível observar como os alunos reagiam diante de cada atividade proposta. As observações foram constituídas de registro das aulas, gravações em vídeo, fotos e reflexões orais feitas pelos alunos.

Considerações finais

Durante o trabalho, percebemos que foi se desenvolvendo uma interação muito natural dos alunos com os novos conceitos matemáticos que iam se incorporando à aprendizagem. Demonstraram também estar sempre observando a presença da matemática em diferentes contextos do dia-a-dia. As atividades planejadas envolveram os sentidos da criança, ou seja, a habilidade da visão, audição, do tato e da motricidade foram exigidas na execução das tarefas que de acordo com Lorenzato (2006) a criança aprenderá mais facilmente quando estes sentidos são estimulados.

[3] O software GCompris é um software educativo gratuito composto de um conjunto de aplicativos contendo uma ampla quantidade de atividades para crianças de 2 a 10 anos de idade. Oferece uma série de atividades abrangendo diversos temas, como o funcionamento do computador, a utilização do mouse e do teclado, conhecimentos gerais, leitura, escrita, idiomas estrangeiros, álgebra, bem como outras atividades, como jogos de memória e lógica, experimentos científicos, etc.

As atividades aqui relatadas não tem intenção de esgotar as possibilidades pedagógicas existentes para o trabalho de geometria com crianças. Nosso objetivo foi propor atividades que instigassem os alunos a criar, investigar e a problematizar questões desafiadoras.

Referências

ABRANTES, P. Investigações em geometria na sala de aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P. DA; ABRANTES, P. (ORG.). **Ensino da geometria no virar do milénio**. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999. p. 51–62. (disponível em: www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC15272255852T.doc) Acesso em 05/10/2011

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais-** séries Iniciais/ Secretaria da Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 2000.

FALZETTA, R. Construa a lógica, bloco a bloco: In: **Nova Escola**, 111 ed., abr.1998, p. 20-23.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas/SP: Autores Associados, 2006.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional: os afetos na aprendizagem matemática.** trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003/2000.

GUIMARÃES, S. D.; VASCONCELLOS, M.; TEIXEIRA, L. R. M. **O ensino de geometria nas séries iniciais do ensino fundamental:** concepções dos acadêmicos do Normal Superior. Revista Zetetiké, Campinas: Unicamp, v. 14, n. 25, p. 93-106, 2006.

LORENZATO, S. **Educação infantil e percepção matemática.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, SBEM, Campinas: Unicamp, Ano III, n.4, p. 3-12, 1995.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké, Campinas: Unicamp, v.1, n.1, p.7-18, 1993 (disponível em: http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=29) Acesso em 10/10/2011

PIRES, C. M. C.; E CURI, E. e CAMPOS, T. M. M. (orgs.), **Espaço e forma**: A construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental. São Paulo: PROEM, 2000. 285 p.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Brincadeiras infantis nas aulas de Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Messenas Miranda Rocha[1]
Instituto Federal do Espírito Santo – *Campus* Itapina

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[2]
Programa de Pós-Graduação em Educação
Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo: Neste texto trazemos recortes de um estudo de mestrado sobre atividades de resolução de problemas e de investigação matemática em uma turma de ensino médio. Aqui focalizamos em uma tarefa investigativa. Os trabalhos de Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) forneceram os aportes teóricos para esta parte da pesquisa. Nossa investigação de mestrado foi de natureza qualitativa. Os dados foram coletados durante todo o 1º ano do ensino médio em 2008 e nos dois meses iniciais do 2º ano em 2009. Neste trabalho concentramos em uma tarefa de investigação matemática explorada em nosso estudo com os objetivos de: a) verificar se as atividades investigativas possibilitavam que os alunos relacionassem conceitos matemáticos já estudados e iniciassem a construção de outros conceitos; b) explorar as potencialidades de tarefas investigativas, que são tarefas matemáticas de caráter mais aberto, como ferramenta para que os alunos expressassem suas próprias ideias e hipóteses, e as defendessem com argumentos lógicos e racionais em suas conclusões, de modo que eles se sentissem fazendo matemática e agindo como verdadeiros matemáticos; c) desenvolver uma atitude crítica nos alunos a respeito das proposições apresentadas por eles que permitissem a todos uma troca de experiências e de conceitos matemáticos. Neste artigo apresentamos exemplos de observações registradas por dois alunos dessa turma. Finalizamos com reflexões a respeito de nossas aprendizagens enquanto professores e enquanto professores pesquisadores.

Palavras-chave: Ensino Médio; Investigação matemática; Matemática.

Atividades investigativas em aulas de matemática no ensino médio

> Uma atividade matemática rica por parte dos alunos surge, em especial, quando o professor valoriza a realização, discussão e avaliação de atividades de investigação por parte dos alunos (Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado, 1998, p. 9).

De acordo com esses autores, durante a realização de uma aula com atividades de investigação devemos trabalhar basicamente em três etapas: i) inicia-se a atividade apresentando à turma oralmente e por escrito a tarefa; ii) pedimos aos alunos que façam observações livres e as registrem individualmente ou em pequenos grupos e iii) coordenamos uma discussão com a turma sobre os resultados e conclusões obtidas. Eles sinalizam que essas aulas devem acontecer em aulas de horário duplo, pois uma hora aula de 40 ou 50 minutos torna-se inapropriada para que ocorram as três etapas de investigação. Caso o professor tenha as suas aulas semanais sempre isoladas em aulas de apenas 40 ou 50

[1] Licenciado em matemática pela UFES, mestre em educação pelo PPGE/CE/UFES, doutorando em educação no PPGE/CE/UFES. Professor do Ifes Campus Itapina. messenas.rocha@ifes.edu.br
[2] Licenciada em matemática e mestre em matemática pela UFRJ, doutora em educação por Indiana University, professora aposentada da UFRJ, e professora do PPGE/CE/UFES, e-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com

minutos, sugere-se que em uma aula trabalhe com seus alunos as duas primeiras etapas e reserve outra aula para trabalhar a etapa de culminância onde a turma vai apresentar e discutir as regularidades observadas, as hipóteses e conjecturas registradas e levantadas, os conceitos matemáticos que perceberam. Em aulas de investigação o papel do professor como mediador é fundamental, pois segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005):

> Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo (p. 26).

Portanto devemos ressaltar a importância do papel do professor como mediador nesses momentos iniciais quando ele e a turma têm pouca ou nenhuma experiência com essas atividades investigativas. Se nós, professores, tivermos a oportunidade de mudar uma prática de aula tradicional, passando para uma prática inovadora e desafiadora (SANTOS, 1997), respeitando as atitudes dos alunos, suas diferenças e valorizando o que eles desenvolvem dentro de suas potencialidades, provavelmente estaremos formando alunos críticos mais do que repetidores de conceitos matemáticos. Estaremos construindo com esses alunos outro conceito de escola, que valoriza suas experiências e tornando os momentos de aula como espaços privilegiados para aprendizagem com significado. As pesquisas com tarefas de investigação matemática (AMORIM, MATOS, 1990; CAMARGO, 2006 PONTE, OLIVEIRA, CUNHA, SEGURADO, 1998; PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2005); levaram-nos a acreditar que estas nossas conjecturas a respeito da sala de aula seriam viáveis.

Contexto do estudo e procedimentos metodológicos

A investigação de mestrado aconteceu em uma escola pública da rede estadual no município de Baixo Guandu-ES, por nove meses. Este estudo de natureza qualitativa caracterizou-se como uma pesquisa-ação (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), onde se procurou identificar e analisar algumas crenças e concepções de alunos sobre a matemática e seu processo educativo. Além disso, buscou: a) verificar se as atividades de resolução de problemas e atividades de natureza investigativa possibilitavam que os alunos relacionassem conceitos matemáticos já estudados e iniciassem a construção de outros conceitos; b) explorar as potencialidades de tarefas de resolução de problemas (que podem ser tarefas fechadas ou abertas) e tarefas investigativas, que são tarefas matemáticas de caráter mais aberto.

Trabalhamos com uma turma de 34 alunos de 1º ano de ensino médio durante nove meses. Nesse tempo dois professores[3] atuaram como professores da turma

[3] A pesquisa iniciou com um professor regente, que atuou de fevereiro a início de agosto. Depois outro professor assumiu a turma

de ensino médio. Os dados foram coletados através de (i) questionários respondidos pelos alunos e professores (ii) registros do pesquisador[4] em seu diário de campo de aulas do professor regente da turma e tarefas dos alunos no quadro, (iii) de tarefas escritas realizadas pelos alunos, (iv) gravação em áudio das aulas ministradas pelo professor regente e pelo professor pesquisador, (v) registros e observações das aulas ministradas pelo pesquisador feitos pelo professor regente da turma. Os estudos de Gómez Chacón (2003) sobre matemática e afetos, Polya (1995/1945) a respeito de resolução de problemas, pesquisas sobre investigação matemática (PONTE, OLIVEIRA, CUNHA E SEGURADO, 1998; PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2005), e formas alternativas de avaliar aprendizagem matemática e reflexões a respeito de aulas tradicionais e inovadoras (SANTOS, 1997) ofereceram aportes teóricos para este trabalho de mestrado. Os dados foram coletados através de aulas observadas e ministradas, e atividades resolvidas pelos alunos. Os procedimentos de análise ocorreram à luz desses autores.

Desenvolvimento do estudo e análises de alguns episódios

Nesse artigo trazemos alguns recortes da pesquisa de Rocha (2009) para exemplificar o potencial identificado em tarefas de investigação matemática. Iniciamos no estudo com uma tarefa de investigação numérica de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), onde os estudantes tinham que explorar livremente números organizados em linhas e colunas. A tarefa proposta foi a seguinte:

– Procure descobrir relações entre os números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

Registre as conclusões que for obtendo.

Realizamos a atividade durante duas aulas de cinquenta minutos em dias diferentes, dividindo essa aula em três momentos. No primeiro momento eles fizeram observações individuais, no segundo momento trocaram ideias com seu grupo e no terceiro momento realizaram a socialização das ideias matemáticas identificadas com a turma. Apenas alguns alunos tentaram provar algumas conjecturas matemáticas identificadas nos padrões numéricos dessa sequência. Orientamos que eles deveriam olhar a sequência de números dada e

[4] O primeiro autor desse texto realizou a pesquisa de campo. Este professor atuou na pesquisa como professor pesquisador.

estabelecessem relações entre esses números que estavam dispostos em linhas e colunas. Todos se empenharam por aproximadamente 40 minutos, período disponível para as observações individuais e a troca de informações entre os elementos do grupo.

Observamos que nessa fase introdutória da investigação, o período em que os alunos ficaram livres para fazer suas observações e compartilhar com os demais colegas do grupo, não deve exceder a uma aula, para não perder o interesse pela tarefa. Era importante, nesse momento da tarefa, que o professor-pesquisador sempre estivesse disponível para tirar algumas dúvidas iniciais dos grupos. Encontramos alunos que não sabiam o que era para fazer. Eles perguntavam o que tinham que fazer, porque não estavam entendendo o que deviam calcular. Como eles nunca tinham realizado uma atividade investigativa dessa natureza, eles sentiam-se perdidos, pois a tarefa não tinha nenhuma pergunta matemática clara, ou seja, era uma tarefa matemática aberta. Por isso, nós aceitamos com naturalidade essas perguntas. Começamos a circular pela sala tentando observar o que realmente os alunos estavam conseguindo fazer e respondemos a alguns questionamentos pontuais, sobre algumas de suas observações iniciais.

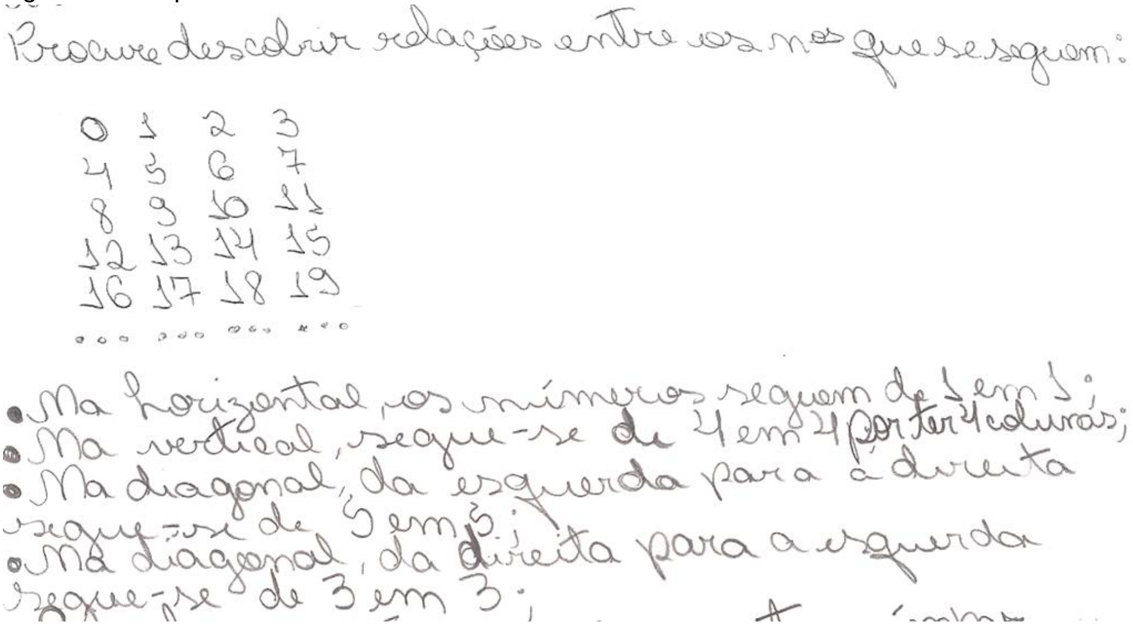
Foi possível notar que os alunos escolhidos para representar o grupo, assumiram um espírito de liderança positiva envolvendo os demais colegas na execução da tarefa. Essa atitude facilitou o desenrolar da mesma, pois no grupo eles tinham que juntar as observações iniciais registradas por cada membro do grupo e tinham que chegar a um consenso. Como já citamos anteriormente, o segundo momento de uma aula investigativa, após a fase inicial de observações dos alunos, em que eles registraram suas conclusões individuais e em grupo é importante. Decidimos que direcionaríamos outra aula para que todos pudessem apresentar suas observações e conclusões. Exigimos que durante essas apresentações, outro aluno que não fosse o líder pudesse apresentar as conclusões do grupo.

A proposta era que toda a turma observasse e analisasse os relatos dos colegas, tentando validar ou não as observações e conclusões. Essa era uma fase importante das atividades de natureza investigativa. Porque este era o momento em que os alunos defenderiam suas conjecturas e teriam que procurar e pensar em argumentos matemáticos que provassem as mesmas. Nessa fase era importante que eles opinassem sobre os trabalhos dos colegas e analisassem juntos com os colegas o que escreveram. Era uma oportunidade para se expressarem oralmente defendendo com argumentos matemáticos o que conseguiram concluir. Inicialmente, os grupos ficaram com receio de participar desse momento, foi preciso incentivar alguns alunos a iniciarem a discussão. Mesmo com essa dificuldade inicial, todos relataram suas observações. As observações que os alunos falavam eram anotadas no quadro e os outros já as analisavam se eram válidas ou não. Nessa fase, também foi possível constatar que a turma concentrava-se nas ideias defendidas pelo líder do grupo. E alunos dos outros grupos refutavam as ideias apresentadas por esse líder e defendiam o ponto de vista que tinham sobre o que foi dito. Já os membros do grupo desse líder tentavam defender as ideias do colega. Foi produtivo observar este espírito de debate com argumentos e contra-argumentos matemáticos nessa turma de ensino médio. Estávamos saindo do modelo de aula tradicional de matemática onde apenas o professor valida as ideias (SANTOS, 1997). A seguir trazemos as observações de dois alunos dessa turma que avançaram em observações, registros e argumentos matemáticos. Por questões de formatação do texto apresentamos nossas interpretações e depois os registros desses dois alunos.

Interpretações, comentários e análises dos registros do aluno A13

Analisando as sete observações que o aluno realizou nessa atividade (fig.1 e 2), foi possível perceber que ele recorreu à ideia de números e suas operações como a maior parte da turma. Ele observou a existência de múltiplos de 4, 3 e 5 dentre os números da sequência numérica da tarefa. Ele também identificou números quadrados perfeitos. Observou as sequências de colunas pares e ímpares, observação feita também pela maioria dos colegas. Tentou justificar de maneira elementar, mas que podemos considerar como uma tentativa de validar uma conjectura, quando ele explica que os números seguem em colunas de 4 em 4, pelo fato de os números estarem dispostos em 4 colunas. Fez uma observação que os demais colegas não fizeram, sobre a posição dos números quadrados perfeitos que estão na primeira e na segunda coluna alternadamente.

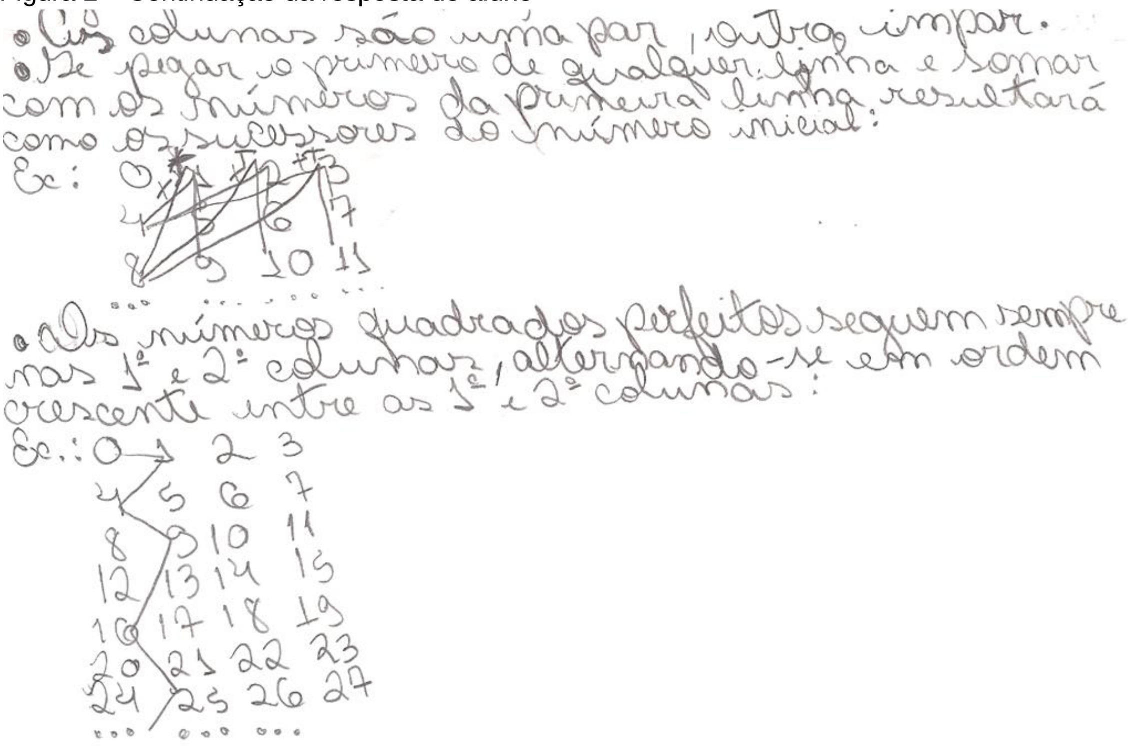
Figura 1 – Resposta de uma aluno da atividade


Procure descobrir relações entre os nºs que se seguem:

0 1 2 3
4 5 6 7
8 9 10 11
12 13 14 15
16 17 18 19
... ...

• Na horizontal os números seguem de 1 em 1;
• Na vertical, segue-se de 4 em 4 por ter 4 colunas;
• Na diagonal, da esquerda para a direita segue-se de 5 em 5;
• Na diagonal, da direita para a esquerda segue-se de 3 em 3;

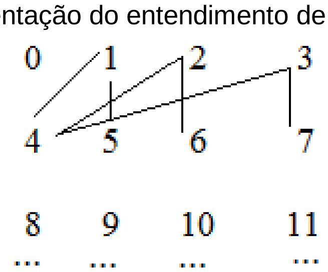
Figura 2 – Continuação da resposta do aluno



Interpretações, comentários e análises dos registros do aluno A7

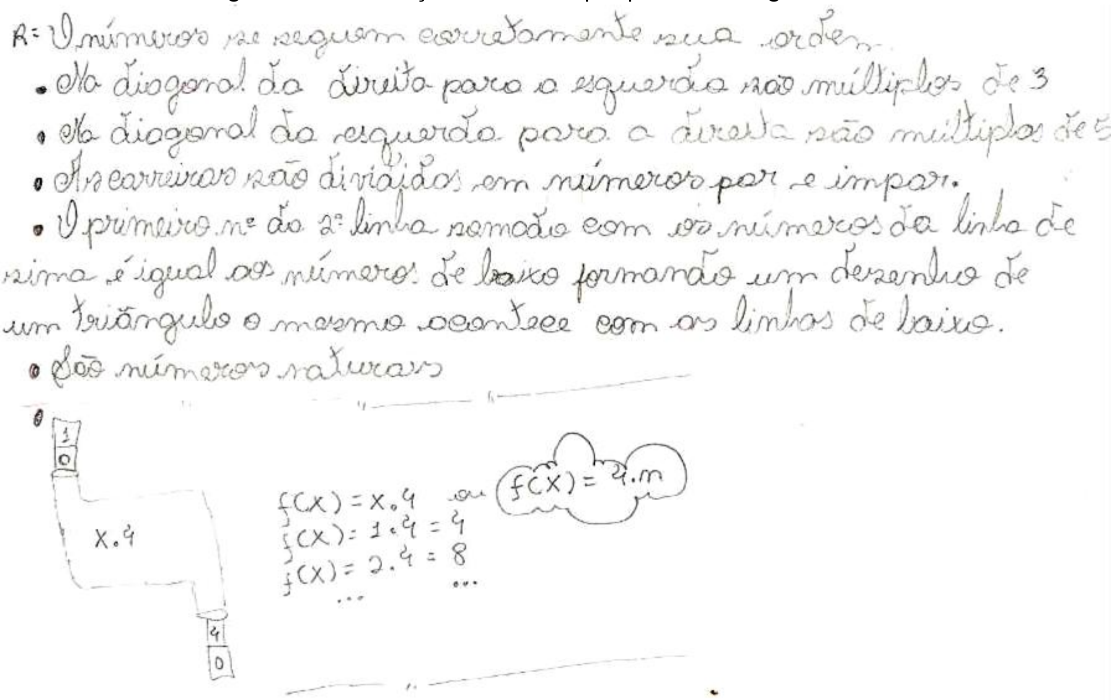
Este aluno fez algumas observações que foram padrão para turma, sobre o que ele considerou como diagonais da direita e da esquerda serem respectivamente múltiplos de 3 e 5, as filas (carreiras) de número pares e ímpares, os números naturais que envolvem essa relação de números. Observou de maneira particular que o primeiro número da 2ª linha somado com os números da linha de cima é igual aos números de baixo formando um desenho de um triângulo, o mesmo acontece com as linhas abaixo. Questionamos esse aluno e o grupo, no momento em que compartilhávamos com a turma sobre a validade dessa conjectura e eles chegaram à conclusão da maneira que representaram no quadro que se segue na figura 3, só seria possível com a segunda linha da tabela.

Figura 3 – Apresentação do entendimento de uma regularidade



Evidenciamos nas relações desse aluno, o que não conseguimos observar nos colegas, quando utilizou a ideia que o professor tinha explicado sobre a aplicação das máquinas para definir as fórmulas de algumas funções. Observamos que olhando a figura da máquina e nos cálculos ao lado, que ele inicia atribuindo valores para **x** (x=0, x=1), que depois considera como **n**, tentando apresentar uma fórmula para representar os números dispostos na primeira coluna. Acreditamos que os conhecimentos adquiridos tomam valor para os alunos quando sentem que precisam deles para realizar uma tarefa que lhes foi proposta. A partir do momento em que o aluno em questão necessitou justificar algo que tinha observado, recorreu ao conteúdo de função, que estava sendo trabalhado pelo professor colaborador, para estabelecer uma relação entre os números que estão na primeira coluna. Podemos perceber a partir das observações feitas por esse aluno, que é bem comum o aluno tentar relacionar suas observações com os conteúdos que eles estejam estudando. Quando procurou verificar o que acontece com a função quando ela assume os diversos valores possíveis para n ele não descreveu de maneira correta o valor da função no ponto, ou seja, quando representou f (x) = 1. 4 para n =1 deveria ter escrito f(1)= 4.1.

Figura 4 – Resolução de aluno que pensou em generalizar



Reflexões a partir de tarefas matemáticas de natureza investigativa

É importante criar alternativas de aulas, exercícios, atividades e maneiras de conduzir nossas aulas que talvez venham a favorecer a aprendizagem de todos ou quase todos os alunos. Quando pensamos e refletimos sobre essas várias hipóteses de trabalho e caminhos para fazer matemática em nossas salas de aula, e do que fazíamos antes, e do que fizemos durante a pesquisa de campo, percebemos que concordamos com a afirmativa do documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002)

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de

> trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática (p. 42).

Tarefas de natureza investigativa oferecem desafios para os alunos e desperta curiosidade matemática nos mesmos. Essas tarefas permitem que os alunos se coloquem na posição de jovens matemáticos fazendo e criando matemática. Foi instigante notar na plenária, com apresentações pelos líderes dos grupos das observações de cada grupo, como os alunos da turma de ensino médio passaram a desempenhar papeis questionadores. As aulas tradicionais de matemática com exercícios, problemas e tarefas de natureza fechada propostas pelo professor ou pelo livro didático, que admitem uma única resposta e um único procedimento de solução transmitem várias mensagens equivocadas para nossos alunos. De início nas aulas com tarefas investigativas os alunos se apavoram e sentem-se perdidos, mas aos poucos passam a perceber que podem formular questionamentos e podem descobrir e encontrar caminhos interessantes para resolver e validar intuitivamente suas observações. Constatamos que uma tarefa de investigação matemática de cunho aberto os deixas perplexos de início, mas tem potencial de despertar criatividade do jovem do ensino médio para situações inesperadas e abertas que ocorrem em nosso cotidiano. Enfim devemos preparar o jovem de ensino médio para ingressar no mercado profissional e/ou ensino superior e prepará-lo para agir como um cidadão crítico. Por isso, tarefas de natureza aberta como as investigações matemáticas podem prepara-los para as situações abertas que vão acontecer no futuro desses jovens se ingressarem quer no mercado de trabalho quer no ensino superior.

Referências

AMORIM, I.; MATOS, J. F. Actividades investigativas em matemática**:** porquê, para quê, como? In: ENCONTRO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1990, Caldas da Rainha, **ACTAS ProfMat90**. Caldas da Rainha: APM, vol. I, p. 155-171.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

CAMARGO, R. P. **Tarefas investigativas de matemática:** uma análise de três alunas de 8ª série do ensino fundamental. 2006. 128f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 1ª edição brasileira em 1975, segunda reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (A obra foi publicada originalmente em inglês em 1945.)

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 1ª ed., 1ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PONTE, J. P. da; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

ROCHA, M. M. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de matemática no ensino médio**. 211f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SANTOS, V. M. P. dos (org.). **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

POLIEDROS ESTRELADOS E ORIGAMI: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Thais Helena Nakassima Morosini[1], Julia Schaetzle Wrobel[2]
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo: Este é o relato de uma experiência com ensino de Matemática. Partindo da pergunta sobre a existência (ou não) de poliedros regulares não convexos, apresentamos o relato de experiência de uma oficina sobre poliedros estrelados. Para trilhar esse caminho, apresentamos aos alunos diferentes sólidos confeccionados em Origami. Os alunos puderam experimentar os objetos e assim justificar e classificar os poliedros. Avaliar se o poliedro era, ou não, regular. Se ele era, ou não, convexo. Em seguida, construímos o pequeno dodecaedro estrelado com os alunos e apresentamos a definição de Poliedros Estrelados. Essa abordagem facilita a aprendizagem, permitindo a identificação do sólido e suas características a partir da manipulação de materiais concretos e explora as potencialidades do Origami para o ensino da Matemática.

Palavras chave: poliedros estrelados. origami. oficina. formação de professores.

Introdução

Este trabalho teve origem em uma aula de Ensino de Matemática II, disciplina do 6º período do curso de Licenciatura de Matemática de uma Universidade Federal. A disciplina tem por objetivo a análise crítica dos principais conceitos estudados no Ensino Médio e a professora propôs aos alunos que apresentassem, sob a forma seminários/aulas, temas que eles tivessem dificuldade para entender e/ou lecionar. Os seminários eram apresentados individualmente pelos alunos para toda a turma, e era livre a colocação de dúvidas, questionamentos ou comentários pela plateia ao longo da exposição, afinal tratava-se da discussão e aprofundamento dos assuntos abordados.

Na apresentação do tema Poliedros Regulares, um aluno mostrou a seguinte dúvida: existe poliedro regular não convexo? A pergunta foi seguida de argumentações que concluíram que não existiam poliedros regulares não convexos. Segundo um dos alunos, para o poliedro ser não convexo, teríamos que retirar uma parte do sólido convexo para ele ficar com uma reentrância. Essa ação, de tirar uma parte, faria com que as faces não fossem mais congruentes. Nenhum aluno, naquele momento, sugeriu tirar partes iguais de todas as faces.

De fato, partindo das definições dadas naquele contexto, a teoria desses alunos estava correta. Segundo tal definição, que aparece por exemplo em Dante (2008) e é a definição usual de poliedros no ensino médio, uma figura só é considerada poliedro se suas as faces cruzam-se apenas nos vértices e nas arestas. Então os únicos poliedros regulares são os cinco poliedros de Platão.

[1] thaismorosini@gmail.com
[2] juliasw@gmail.com

Apesar de a turma ter se convencido da consistência da resposta, a pergunta remeteu uma das autoras à lembrança de sólidos confeccionados com Origami que, apesar de serem não convexos, apresentavam certa regularidade em sua construção. E fomos investigar esses poliedros.

Nosso ponto de partida foi a leitura do livro de Lemos e Bairral (2010). Os autores exploram a geometria dos poliedros estrelados iniciando pelo processo de estrelação de polígonos e poliedros, com ênfase nos poliedros estrelados regulares, justamente nosso objetivo inicial. Também apresentam diferentes recursos para abordar os poliedros estrelados: vídeos educativos, animações, indicação de softwares gratuitos, planificações em cartolina, construção em Origami, e uma vasta referência de sites sobre o tema. Inclusive, com sugestão de atividades para serem utilizadas em sala de aula. Por fim, os autores apresentam alguns resultados obtidos em implementações de atividades que trabalham os poliedros estrelados com docentes e futuros professores de matemática e pedagogia e estudantes das séries iniciais.

Ainda que o livro de Lemos e Bairral tenha respondido a questão de existência ou não de poliedro regular não convexo para aquela turma, uma deficiência na formação dos licenciandos tinha sido detectada: os alunos não tinham contato com essa teoria durante o curso e era preciso reverter isso. A partir dessa constatação e de uma reflexão sobre as práticas propostas no livro, surgiu o desejo de divulgar o conteúdo para todos os alunos do curso e além. As inquietações não cessaram na pesquisa feita para a aula original de Ensino de Matemática II e transformaram-se nas seguintes questões: como trabalhar a importância e a flexibilidade das definições? Como podemos ensinar esse conteúdo de forma lúdica e interessante? Como transformar esse conteúdo em algo divertido? Nascia assim a oficina de Poliedros Estrelados com Origami.

Como resposta, o presente trabalho apresenta um relato de experiência sobre uma oficina de poliedros estrelados, com o objetivo de desenvolver o seu conceito e verificar características como regularidade, utilizando construção com Origami. A oficina em questão foi ministrada para alunos de Licenciatura Matemática, em uma proposta investigativa. Nesse artigo faremos um recorte das atividades desenvolvidas, priorizando o uso de Origami para trabalhar o conceito de poliedros estrelados. Outras questões abordadas na oficina estão relatadas em Autor 1; Autor 2 (em preparação).

Uso de Origami no ensino de Matemática

Apesar de o Japão ser considerado por muitos o berço do Origami, segundo Lister (2013), importante historiador britânico e estudioso do Origami, o precursor da exploração das dobraduras aplicado à educação foi o alemão Friderich Frobel, fundador do movimento *kindergarten* (jardim-de-infância).Tradicionalmente, no Japão, a arte milenar do Origami possui caráter cerimonial ou recreativo. Com o movimento Froebel as dobraduras ganharam repercussão mundial e destaque na educação, em especial nas escolas japonesas onde a tradição de dobrar foi transferida de casa para a escola.

Froebel considerava a dobragem, como a atividade era conhecida no ocidente até por volta de 1958, como uma forma de ensinar a geometria simples e compreendia a importância da representação do mundo concreto para a aprendizagem:

> As técnicas utilizadas até hoje em Educação Infantil devem muito a Froebel. Para ele, as brincadeiras são o primeiro recurso no caminho da aprendizagem. Não são apenas diversão, mas um modo de criar representações do mundo concreto com a finalidade de entendê-lo (FERRARI, 2013, p.1).

Apesar da morte de Froebel em 1852, o Origami nas escolas continuou a ser difundido pelo mundo por seus seguidores, porém atingindo diferentes graus de sucesso. Muitos professores não entenderam as ideias Froebelianas e ensinaram as dobragens mecanicamente, deixando a atividade repetitiva e sem graça.

Devido ao surgimento de novas tendências e ao abandono dos aspectos criativos e matemáticos no ensino das dobraduras, o Origami educacional perdeu espaço. Houve inclusive relatos da recomendação de sua não utilização nos programas de educação artística. Em Origamian de outono, 1963, Yoshizawa (apud Lister, 2013, p.1) escreveu: “Em 1945, a conferência internacional da Unesco de Estudos sobre as Artes e Ofícios na Educação, decidiu contra a inclusão do Origami na sua lista de programas de educação artística.” Mas felizmente, o uso das dobraduras não foi totalmente abolido.

Segundo Oliveira (2004), o primeiro livro com dobras em um contexto matemático que se tem conhecimento foi publicado em 1721, *Wakoku Chiyekurabe*, de autoria de Kan Chu Sem. O livro apresenta uma variedade de problemas envolvendo raciocínio matemático.

Kanegae (2013) relata que a introdução do Origami no Brasil ocorre por duas vertentes distintas: a influência dos artigos de Miguel Unomuno, então reitor da Universidade de Salamanca, e posteriormente por Dr. Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo, imigrantes europeus na argentina, que publicaram livros no final da década de 30 sobre o assunto.

No Brasil, o Origami é popularmente conhecido como dobradura. Em todos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) existe apenas uma referência explícita ao Origami enquanto recurso para trabalhar conteúdos matemáticos, nos PCN das séries inicias:

> As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos,

> empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa (BRASIL, 1997 p. 79).

Mas o uso do Origami no ensino da Geometria pode ajudar no desenvolvimento cognitivo, facilitando a aprendizagem e a compreensão da Matemática através da manipulação de um simples pedaço de papel, material de fácil acesso. "Com isto estamos lidando com mais uma metodologia de ensino e estudo da Geometria Elementar, com o uso de uma técnica milenar, concreta e divertida, além de acessível a qualquer pessoa." (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.1).

Segundo Hayasaka e Nishida (2012), o uso pioneiro do Origami no Ensino Fundamental brasileiro é atribuído a Yachiyo Koda que ofereceu diversas oficinas a educadores e professores através da Aliança Cultural Brasil e Japão. Atualmente, diversos livros didáticos e trabalhos científicos fazem uso desse recurso (Imenes, 1996; Oliveira 2004; Lemos; Bairral, 2010; Vieira, 2012) mas ainda em escala muito pequena.

A Oficina de Poliedros Estrelados

A oficina de Poliedros Estrelados foi ministrada para 21 alunos do Curso de Graduação em Licenciatura Matemática. Todos cursavam a disciplina Estágio II, que é o quarto Estágio Curricular Supervisionado voltado ao Ensino Médio. Os alunos tinham idade entre 19 e 25 anos e, como dissemos, estavam em seu último semestre de formação.

O objetivo geral de Estágio II é a análise, discussão e produção de situações didáticas. A disciplina propõe ainda a docência supervisionada nas classes de Ensino Médio, envolvendo conteúdos pertinentes e integrando reflexão e ação. Desta forma, entendemos que é fundamental oferecer subsídios para que o professor-aluno, ao adentrar o campo de estágio, possa desenvolver ações embasadas no conhecimento científico e teórico adquirido ao longo dos semestres.

A oficina foi ministrada em duas tardes. No primeiro dia trabalhamos uma revisão dos conceitos geométricos e, a partir daí, foi proposta uma reflexão sobre as definições que estavam sendo usadas e a importância de uma definição consistente. Esses resultados estão apresentados em Autor 1; autor 2 (em preparação). Em seguida foi possível trabalhar o conceito de estrelação de polígonos e poliedros.

Visando avaliar o conhecimento prévio dos alunos a respeito dos temas que seriam desenvolvidos na oficina, a apresentação foi aberta com uma avaliação diagnóstica oral: existem poliedros regulares não convexos? O que é poliedro estrelado? Você possui experiência com Origami? E com geometria das dobraduras?

Quando perguntamos sobre a existência de poliedro regular não convexo, esperávamos que os alunos respondessem negativamente, pois, no ensino médio, comumente é ensinado que existem apenas cinco poliedros regulares: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. E todos esses são convexos. Além disso, essa tinha sido a nossa experiência em outra turma, na disciplina Ensino II. E de fato um aluno respondeu com a justificativa esperada, fazendo referência aos Poliedros de Platão como sendo os únicos poliedros regulares. Essa explicação foi apoiada por todos os outros participantes.

Pela fala dos alunos, a definição que estava no inconsciente coletivo é a definição usual do ensino médio:

> Um poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço delimitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões é também lado de uma única outra região poligonal. A interseção de duas faces quaisquer é um lado comum ou é um vértice ou é vazia (DANTE, 2008, p.149).

Com essa definição, onde insistimos, as faces só se interceptam em vértices ou arestas, existem apenas cinco poliedros regulares. Essa afirmação vem dos tempos de Euclides e foi publicada em Os Elementos:

> Digo então que exceto as cinco ditas figuras [poliedros de Platão] não será construída outra figura contida por equiláteros e também equiângulos iguais entre si (EUCLIDES, BICUDO, 2009, p.592).

Não é difícil encontrar provas desse Teorema, bem conhecido pelos alunos (CARVALHO et al, 2010).

Sobre as demais perguntas, nenhum dos alunos conhecia ou já tinha ouvido falar sobre poliedros estrelados ou geometria dos Origamis/dobraduras. Os relatos de experiência com o Origami referiam-se a atividades desenvolvidas na infância, com modelos tradicionais de dobras simples, tais como avião, barco e chapéu. Segundo esses relatos, mesmo os modelos ensinados na escola tinham finalidade recreativa ou de avaliar o desenvolvimento da coordenação motora, nunca com ênfase na matemática envolvida no processo.

Para revisar as definições, apresentamos aos alunos diferentes sólidos confeccionados em Origami por uma das autoras (Figura 2). Os alunos podiam experimentar os objetos e assim justificar se o poliedro era, ou não, regular. Se era, ou não, convexo. Esta atividade permitiu apresentar o Origami modular e explorar algumas de suas possibilidades como recurso para enriquecer a aprendizagem de matemática.

Figura 2. Sólidos confeccionados em origami.

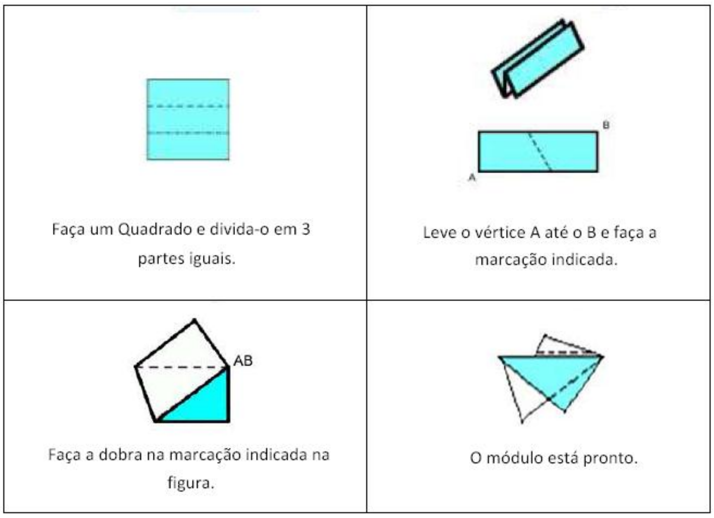
Os alunos conheciam a definição de poliedro regular, "Um poliedro é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas" (COXETER, 1973, p.15). Apresentavam dúvidas, mas logo construíram a definição de convexidade: "Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos." (CARVALHO et al, 2006, p.233; DANTE, 2008, p.149). Ainda assim, de posse das definições, tiveram muita dificuldades em classificar os objetos apresentados. Questionaram, por exemplo, quais seriam as faces desses poliedros que eles nunca tinham visto. Essa questão só ficou bem resolvida no dia seguinte, quando apresentamos a definição de poliedros estrelados e voltamos a manipular os sólidos.

Quando perguntado aos alunos se eles seriam capazes de imaginar sólidos como aqueles, a resposta negativa foi unânime. Quando pensamos em um sólido, estamos condicionados a recorrer a imagens cotidianas e o Origami proporciona extrapolar essa linearidade de pensamento. A combinação de diferentes módulos permite construir uma infinidade de sólidos.

O primeiro dia foi encerrado com as questões em aberto e a apresentação da dobradura do módulo utilizado na construção do pequeno dodecaedro estrelado. Os alunos dobraram cerca de cinco módulos em aula, sob a nossa orientação e acompanhamento, e a dobra do restante, 25 módulos, ficou como atividade para ser executa em horário extraclasse. Essa estratégia permitiu otimizar o tempo de apresentação, avaliar o comprometimento dos participantes com a oficina e explorar a memorização que o Origami requer para a dobra dos módulos.

O segundo dia foi iniciado com a montagem do pequeno dodecaedro estrelado, que é a primeira estrelação do dodecaedro, utilizando técnicas de Origami modular. Para isso, foram usados 30 módulos Super Simple Isosceles Triangle, confeccionados com folhas quadradas de 15x15cm, cola (para facilitar a montagem e dar mais estabilidade ao sólido) e tesoura, como item opcional para facilitar aqueles que apresentassem dificuldades na manipulação do papel. O módulo pode ser visto na Figura 3 e está construído em detalhes em Lemos e Bairral (2008):

Figura 3. Super Simple Isosceles Triangle.



Fonte: Lemos; Bairral, 2008.

Um aluno trouxe o sólido já construído para a aula. Relatou que ficou ansioso com a atividade e pesquisou o processo de montagem em casa, obtendo êxito ao montá-lo sozinho. Foi possível observar o interesse que o Origami despertou no aluno e a dedicação dispensada para execução da atividade. Esse aluno ajudou outros colegas na montagem do sólido durante a oficina.

O silêncio ao longo da construção do sólido evidenciou a concentração e envolvimento dos alunos na montagem. Aspectos atitudinais como companheirismo e solidariedade também puderam ser observados com alunos que ajudaram o colega a dobrar os módulos antes da oficina ou interromperam a montagem do seu sólido para auxiliar o outro.

A montagem decorreu mais tranquila do que o esperado, requerendo apenas o acompanhamento constante para verificar e corrigir possíveis montagens erradas. A única dificuldade observada, por poucos alunos, foi no encaixe dos módulos. Daí a necessidade do uso de cola. O processo de montagem está mostrado na Figura 4 e o resultado na Figura 5.

Figura 4. Montagem do dodecaedro estrelado.

Figura 5. Pequeno dodecaedro estrelado.

A construção do poliedro como primeira atividade do segundo dia foi proposital, pois permitiu a manipulação do material concreto enquanto a teoria dos poliedros estrelados era apresentada.

Em um segundo momento, trabalhamos com os alunos o conceito de poliedro estrelado. Para isso, bastou flexibilizar nas definições, admitindo que as faces dos poliedros pudessem se intersectar sem restrições. Os alunos nunca tinham usado as definições dessa maneira e demoraram algum tempo para se familiarizarem com ela.

A partir da manipulação do pequeno dodecaedro estrelado construído no início da aula, foi possível visualizar e compreender o processo de estrelação de poliedros e analisar o que é uma face, um vértice e uma aresta, além de poder contar a quantidade de cada um desses objetos. Os alunos puderam então concluir tratava-se de um poliedro regular não convexo. Essa descoberta os deixou fascinados. Jamais imaginaram que esse objeto geométrico realmente existisse e, mais ainda, que eles tivessem acabado de construí-lo.

Em seguida, apresentamos e analisamos o grande dodecaedro e o grande dodecaedro estrelado confeccionados em Origami por uma das autoras. O grande icosaedro foi o único sólido que foi trabalhado apenas a partir dos slides. Esse sólido apresenta maior dificuldade de construção e, assim como Lemos e Bairral (2010) ainda não conseguimos um resultado satisfatório nessa construção.

Os alunos puderam perceber que nenhum desses quatro poliedros estrelados satisfaz a famosa fórmula de Euler, $V + F - A = 2$, onde V, F e A são, respectivamente, o número de vértices, faces e arestas do poliedro, o que os deixou novamente surpresos. Apesar de livros didáticos (por exemplo Dante, 2008) chamarem atenção para o fato de a fórmula não ser satisfeita para todos os poliedros, os alunos nunca tinham prestado atenção a isso.

Em seguida, apresentamos uma breve história e algumas curiosidades sobre os poliedros estrelados regulares, também conhecidos como Poliedros de Kepler-Poinsot.

Ao final da oficina foi retomada a pergunta “Existe poliedro regular não convexo?” que claramente obteve resposta diferente da apresentada no início da oficina. Foi possível concluir que, com o relaxamento na definição de poliedro, existem nove poliedros regulares, sendo cinco convexos, os sólidos platônicos, e quatro não convexos, os poliedros de Kepler-Poinsot. Esse Teorema foi provado por Cauchy no início do século XIX.

Conclusão

Neste artigo, divulgamos uma experiência de trabalho de poliedros estrelados com o uso de Origami. Embora fascinante, este tema é pouco abordado nas formações de professores e, consequentemente, quase não se tem notícias dele no ensino básico.

Quando perguntamos aos alunos se eles seriam capazes de imaginar sólidos como aqueles apresentados para estudo, a resposta negativa foi unânime. Estamos condicionados a recorrer a imagens cotidianas e dos livros didáticos e o Origami proporcionou esse passo a mais. A riqueza da utilização de sólidos de Origami, com manipulação, visualização, diferentes materiais e texturas, conquistou os alunos. O efeito provavelmente não seria o mesmo com a visualização em 2D na tela de computadores de sólidos que estão em 3D, mesmo com todos os recursos computacionais atuais.

A divisão da oficina em dois dias, com a dobra de 25 módulos em casa garantiu a otimização de tempo, a avaliação do comprometimento dos participantes com a atividade e a exploração da memorização que o Origami requer. Por outro lado, a construção do poliedro como primeira atividade do dia permitiu a manipulação do material concreto enquanto a teoria era apresentada.

As atividades aqui apresentadas não se encerram em si mesma, mas abrem caminhos para novas ideias e investigações. Perceber o encantamento, a participação, o comprometimento e principalmente a motivação dos alunos sugere que estamos no caminho certo para um ensino de qualidade, baseado em conhecimentos matemáticos sólidos mas apresentados de forma lúdica.

Uma questão teórica que merece investigação com os alunos é sobre a condição de existência dos poliedros estrelados.

Por fim, deixamos uma citação de Lister, com a qual nos identificamos muito e acreditamos ser um excelente caminho para o ensino e aprendizagem:

> Da nossa experiência com crianças, individualmente e em pequenos grupos vocacionados, sabemos que o Origami tem méritos excepcionais e diversos na educação. É uma esperança que todos partilhamos de que o Origami se desenvolva e prospere como um trunfo na educação (LISTER, 2013, p. 1).

Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida; LEMOS, Wellington Gonçalves. **Recursos na internet e dobraduras para poliedros estrelados: u**ma proposta para o trabalho no Ensino Médio. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 1, p. 38-57, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (1ª a 4ª série). Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 29 out. 2013.

CARVALHO, Paulo Cesar; et al. **A matemática no ensino médio**. Coleção Professor de Matemática, vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko. **Exlorando Geometria com Origami**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2010.

COXETER, H. S. M. **Regular Polytopes**. London: Dover, 1973.

DANTE, Luiz Roberto. **Coleção Matemática**: 3a série. 4ª. Imp. São Paulo: Ática, 2008.

EUCLIDES; BICUDO, Irineu (Trad.). **Os Elementos de Euclides**. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, 2009.

FERRARI, Marcio. **Friedrich Froebel, o formador das crianças pequenas**. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/educacao-infantil/4-a-6-anos/formador-criancas-pequenas-422947.shtml>. Acesso em: 18 set. 2013.

HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. **Origami na Educação**. Disponível em: <http://www.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami>. Acesso em: 10 maio 2012.

IMENES, Luiz Marcio. **Geometria das dobraduras.** Coleção Vivendo a Matemática. São Paulo: Scipione, 1996.

KANEGAE, Mari. **Breve histórico do Origami no Brasil**. Disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/>. Acesso em: 20 out. 2013.

LEMOS, Gonçalves Wellington; BAIRRAL, Marcelo Almeida **Poliedros Estrelados no currículo do ensino médio.** Rio de Janeiro: Edur, 2010.

LISTER, David. **Origami nas Escolas no Japão e no Ocidente.** Disponível em: <http://Origami.paginas.sapo.pt/textos_de_david_lister_4.htm>. Acesso em: 29 out. 2013.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira de. **Origami:** Matemática e Sentimento. São Paulo, 2004. Disponível em: <http://educarede.homedns.org/educa/img_conteudo/File/CV_132/2004-10-18_-_Origami-Matem_tica_e_sensibilidade1.pdf>. Acesso em: 29 out. 2013.

VIEIRA, Magnum Freire. **A arte do Origami no ensino de geometria:** um estudo de caso no projovem adolescente. 2012. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciado em Matemática) - UEPB, Campina Grande, 2012.

APRENDIZAGENS DE PROFESSORAS CONSTRUÍDAS EM GRUPO DE ESTUDO DE MATEMÁTICA

Bernadete Verônica Schaeffer Hoffman[1], Sheila Rohr de Souza[2],
Prefeitura Municipal de Vitória

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner[3]
Programa de Pós-Graduação em Educação
Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo: Neste texto relatamos algumas experiências de aprendizagem no Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo – [GEEM-ES]. Apresentamos o relato de uma experiência escolar realizada em 2012 em uma turma de 3ª série/4º ano em uma escola municipal de Vitória. Partimos da utilização de um mapa conceitual do tipo diagnóstico para identificar algumas ideias dos alunos. Relatamos as reflexões que esse recurso nos permitiu fazer enquanto professoras pesquisadoras de nossas práticas de ensino. Além disso, exibimos como essa tarefa escolar nos serviu de ponto de partida para a introdução das ideias de multiplicação e divisão.

Palavras-chave: grupo de estudos – aprendizagem, reflexão; matemática; multiplicação; divisão.

Introdução

Ao iniciarmos o ano letivo escolar nos deparamos com vários desafios, um deles é diagnosticar o que o aluno sabe e o que não sabe a respeito de conceitos matemáticos já estudados. Outro desafio é compreender que relação de afetividade o aluno/a aluna possui com essa disciplina em suas experiências vividas e como podemos interagir na construção desse saber de maneira satisfatória. Diversas dúvidas surgem na mente dos professores e nos questionamos sobre como agir nesse instante. Foi com essas inquietações que aceitamos em 2006 o convite para integrarmos o Grupo de Estudos em Educação Matemática do Espírito Santo - GEEM-ES. Inicialmente atuamos como participantes de uma pesquisa de doutorado na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) sobre aprendizagens de professores (SILVA, 2009). O grupo de estudos segue com suas atividades envolvendo outros professores de redes públicas e privadas de ensino, professores da UFES e do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), estudantes de graduação e pós-graduação das duas instituições federais. Os encontros semanais do GEEM-ES aconteciam até 2011 na UFES e estão ocorrendo desde 2012 no IFES. Hoje o grupo tem como objetivo principal a reflexão sobre a prática na sala de aula de matemática, por meio de troca de experiências, leituras, estudos e debates. Isso nos possibilita um olhar reflexivo sobre nossas ações, nossa própria relação com a matemática e nossos conhecimentos matemáticos. Essa oportunidade tem contribuído para nosso desenvolvimento profissional e para a construção da identidade docente.

---

[1] Mestranda da UFES e profª. da Rede Municipal de Ensino de Vitória. bernahoffman@yahoo.com.br
[2] Profª. e pedagoga da rede municipal de Educação de Vitória – sheila.rohr@yahoo.com.br
[3] Profª Drª aposentada da Universidade Federal do Rio de Janeiro/ Profª colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Espírito Santo. profvaniasantoswagner@gmail.com; santoswagner.vm@gmail.com

Perspectivas teóricas

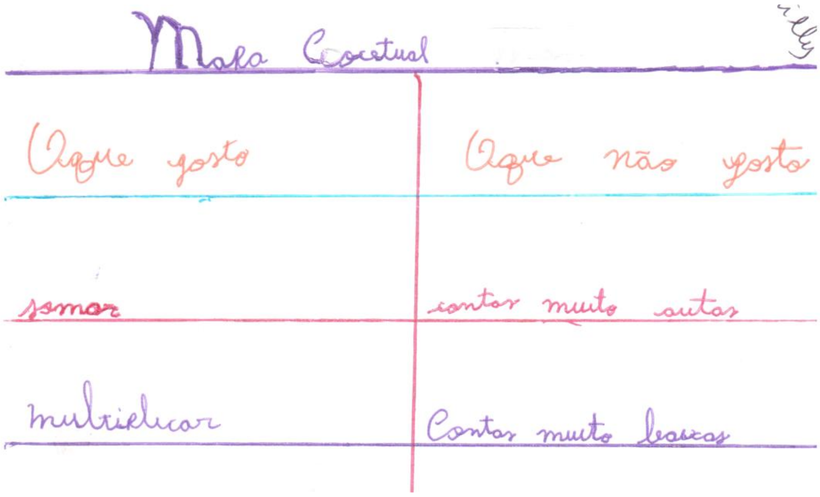
Em nossos estudos no GEEMES e em pesquisas paralelas discutimos a importância dos processos de comunicação em aulas de matemática. Assim damos destaque à leitura, escrita, representação pictórica e oralidade como alternativas de ensino, aprendizagem e avaliação nessa disciplina (SANTOS; 1997). Essa autora sugere ao professor que pensar em novos direcionamentos para o ensino de matemática requer "mudanças na postura pedagógica, mudanças na prática de avaliação e mudanças na postura de aprendizagem do aluno" (p. 11). Isso requer do professor reflexão crítica sobre a sua própria prática pedagógica e também de outras práticas para introduzir outras atitudes e compreensões do que seja ensinar, aprender e avaliar. Um recurso alternativo para usar em situações de aprendizagem e avaliação citado por Santos (1997) é o mapa conceitual adaptado de Novak e Gowin (1984). O mapa conceitual em matemática sugerido por Santos (1997) seria como um retrato instantâneo sobre o que de mais substancial o aluno possui em sua mente sobre um determinado assunto. Pode ser feito coletiva ou individualmente, conter informações sobre as relações afetivas em relação à matemática e nos dar pistas sobre sua aprendizagem.

Ao participar do grupo de estudos de Silva (2009), refletimos sistematicamente sobre conceitos envolvidos nas operações básicas da matemática. Essas reflexões, que aconteceram nos encontros do grupo e posteriormente em nossas salas de aula, nos levaram a ter outro olhar sobre como ensinar esse conteúdo em aulas. Repensamos a nossa dinâmica de trabalho em sala na abordagem de conteúdos privilegiando os trabalhos com alunos organizados em pequenos grupos ou em duplas. Sairíamos da prática de uma matemática solitária para uma prática em que se constroem pequenas comunidades de aprendizagem com autoridade partilhada (SANTOS; 1997). Os estudos no grupo ainda nos levaram a refletir sobre a utilização dos Parâmetros Curriculares Nacionais - [PCN] (BRASIL, 1997). Esse documento, além de ser norteador para a disciplina, traz orientações didáticas para o primeiro e segundo ciclos sobre como ensinar matemática usando diferentes recursos. O trabalho de Spinillo e Magina (2004) reforçaram essas orientações e trazem reflexões sobre o uso do material concreto e da importância de buscar sentidos na aprendizagem matemática.

Práticas influenciadas pelo GEEMES

Dentre as muitas experiências vivenciadas e discutidas desde 2006 no GEEMES nós escolhemos uma realizada recentemente. Essa escolha deve-se ao fato de querermos apontar um dos desdobramentos da pesquisa de Silva (2009) e da nossa participação no grupo desde então. A experiência se deu com uma turma de 25 alunos do 4º ano em uma escola municipal de Vitória. O relato contempla seis aulas de 50 minutos nos meses de fevereiro e março de 2012. Ao iniciarmos o ano letivo, para um planejamento mais eficaz de nossas atividades, precisávamos saber o que o aluno já sabia em matemática, o que não sabia e como se relacionava afetivamente com a disciplina. Assim, recorremos ao mapa conceitual individual como diagnóstico adaptando as ideias de Santos (1997). Na sala, entregamos folhas e as dividimos em duas partes. Pedimos que escrevessem o que gostam em matemática de um lado e o que não gostam de outro como mostra a imagem.

Figura 1. Mapa conceitual individual.



Um olhar atento sobre o que os alunos registraram nessa tarefa deixou transparecer algumas informações. Por exemplo, no espaço reservado para expressarem o que gostam apareceram as palavras *continhas*, *somar* e *multiplicar*. Para esses alunos talvez a matemática se resumisse em *fazer contas*. Nosso primeiro trabalho seria então, ampliar esse conhecimento para que compreendessem matemática além de contas. E talvez ampliar também para os alunos por que e para que precisam das *contas* e o que são. Ao olharmos no espaço em que deveriam relacionar o que não gostam apenas duas ou três respostas foram dadas, como no exemplo da figura 1. Entre as respostas dos 25 alunos, uma frase redigida por um aluno nos marcou muito: *Eu não gosto nada de matemática*. Esse aluno demonstrou tamanha ênfase na frase que reforçava a nossa convicção que essas avaliações são necessárias para que repensemos a forma como ensinamos matemática nas séries iniciais. Uma aluna escreveu que não gosta de *continhas altas* e nem *baixas*. Talvez essa criança queira nos dizer que não deseja atividades difíceis demais, nem desestimulantes ou fáceis demais. Ou talvez ela tente nos informar que contas com muitas parcelas a desagrada, e isso nos mostra que precisamos conversar com esses alunos e procurar compreender o que eles desejam nos informar. Ou talvez seja uma pista para que pensemos em atividades agradáveis ajudando o aluno de maneira natural sem tirar dele o prazer da descoberta e nem frustrá-lo com atividades que ainda não esteja apto a desenvolver (POLYA, 1978/1945). Houve ainda um aluno que citou a *continha de vezes.* Isso nos fez pensar no que discutimos em alguns encontros no grupo de estudos sobre a multiplicação. As crianças normalmente não demonstram dificuldades em matemática enquanto não têm contato com as ideias da multiplicação e com ideias de divisão. Tradicionalmente, temos visto as operações básicas sendo trabalhadas de forma linear. Inicia-se pela adição, passa-se para a subtração e depois se chega à multiplicação, para, por último, introduzir-se a divisão. Atualmente percebemos que esta linearidade para ensinar as operações aritméticas básicas não é a melhor maneira para ensinar esses conceitos. Por exemplo, nós defendemos que as operações de adição e subtração sejam trabalhadas em conjunto pois envolvem ideias que se complementam. Ao adicionarmos duas quantidades para obtermos uma terceira quantidade também podemos pensar em separar estas quantidades iniciais do total obtido. Podemos pensar nestas operações de adicionar e subtrair como operações incorporando raciocínios matemáticos inversos de reunir as partes para obter um todo e de separar uma parte de um todo para obter a outra parte. E também podemos pensar que elas envolvem ideias do campo conceitual aditivo (MAGINA, 2011). E defendemos também que as operações de multiplicação e divisão sejam trabalhadas concomitantemente, pois também envolvem raciocínios matemáticos inversos e podem ser pensadas como envolvendo ideias do campo conceitual multiplicativo (VERGNAUD, 2011). Alguns autores sugerem que os professores trabalhem com todas essas ideias bem mais cedo e de forma interligada (BRASIL, 1997; SPINILLO; MAGINA, 2004; MAGINA, 2011; VERGNAUD, 2011) como aparecem no dia-a-dia do aluno.

A pista fornecida pelo mapa conceitual diagnóstico sobre as aprendizagens matemáticas dos alunos se relacionava ao *fazer contas*. Precisaríamos assim, investir em atividades que as relacionassem a situações com significado. E ainda desenvolver sentimentos positivos em relação ao fazer matemática para que repensassem as suas crenças. E como o desafio maior parecia ser a multiplicação, decidimos trabalhar com essa operação e com a divisão de forma concomitante sem seguir a ordem linear que aparece em muitos livros didáticos.

Para iniciar a ideia de multiplicação utilizamos desenhos no quadro fazendo inicialmente um grupo de elementos até dez. Construímos assim uma tabela de multiplicação de 1 ou a tabela de 1. Isto é, 1 X 1 = 1; 1 X 2 = 2; 1 X 3 = 3... E assim por diante. Realizamos o mesmo procedimento até formarmos a tabela de 4. Em seguida trabalhamos com o material concreto fazendo grupos de tampinhas de garrafas. Os alunos fizeram dois grupos de 3 tampinhas, dois grupos de 4 tampinhas, dois grupos de 5... E assim por diante, sempre contando quantas tampinhas teriam em cada grupo e posteriormente contando quantas tampinhas teriam no total. Após manipularem o material, faziam registros em seus cadernos. Para compreenderem o que é a multiplicação exploramos a ideia de adição de parcelas repetidas ou grupos iguais, 2 x 1 = 1 + 1 = 2; 2 x 2 = 2 + 2; 2 x 3 = 3 + 3... Também foram criadas oralmente situações-problema com elementos da sala de aula. Exemplo: *No centro de nossa sala há duas filas de carteiras. Cada uma com 7 carteiras. Quantas temos no total?* Os alunos percebiam que temos 7 + 7 = 14 ou 2 X 7 = 14; *Camila comprou 2 cadernos, cada um* custou *6 reais. Quanto custaram os* *dois cadernos?* Oralmente fizeram: 6 + 6 = 12 ou 2 X 6 = 12. Outros exemplos foram criados pelos alunos envolvendo situações de suas vivências. Os exemplos já traziam a ideia de área e de parcelas repetidas.

Em outra aula introduzimos o algoritmo da multiplicação e os alunos ficaram felizes porque estavam aprendendo a *continha de vezes*. Inicialmente, trabalhamos somente com as continhas passando-as no quadro como eles as conheciam. Estas eram efetuadas com a ajuda de tampinhas. Também as efetuávamos com a ajuda do Quadro Valor do Lugar - [QVL] utilizando canudinhos para os agrupamentos. Primeiro realizavam as operações com a manipulação do material concreto que lhes servia como referente. Em seguida, utilizavam a escrita com a representação formal da matemática aliada ao desenho. Aqui as crianças reproduziam no QVL desenhado o que acontecia quando faziam as representações nesse recurso. Por exemplo, ao efetuarem 4 X 18, faziam inicialmente 4 x 8 unidades e percebiam que formavam um conjunto de 32 unidades. Nesse momento eles utilizavam a ideia da multiplicação ou da adição de parcelas repetidas, ou seja, calculavam 4 X 8 como 8 + 8 + 8 + 8 = 32. Essas 32 unidades podiam ser agrupadas em 3 dezenas + 2 unidades, logo as 3 dezenas ocupariam a casa das dezenas ficando na casa das unidades apenas 2. Em seguida faziam 4 X 1 dezena que dariam 4 dezenas. A estas teriam que adicionar as 3 dezenas que foram reagrupadas, logo 4 dezenas + 3 dezenas = 7 dezenas. Com as duas unidades, teriam 7 dezenas e 2 unidades ou 72.

Agora, para que os alunos atribuíssem significado a essa operação de multiplicação, criamos também oralmente pequenos problemas: *Adriano tem 4 pacotinhos de figurinhas. Cada um com 18 figurinhas. Quantas figurinhas Adriano tem ao todo?* E mostramos ainda que a operação poderia ter sido feita utilizando-se a adição das figurinhas: 18 + 18 + 18 + 18 = 72*; Tenho 4 caixas de lápis de cor. Cada uma com 12 lápis. Quantos lápis de cor eu tenho?* Também mostramos que poderiam fazer 12 + 12 + 12 + 12 = 48. Poderíamos também ter iniciado com a situação-problema, mas seguimos o caminho que eles nos apontaram falando sobre as *continhas de vezes*. Outras situações seriam formuladas para cada operação feita, inclusive agora por escrito. Cuidávamos para que exercitassem a compreensão das operações de multiplicação não apenas com o material concreto, mas com a ajuda de vários recursos. Por isso, aliado ao material que servia de referente para simbolizar os lápis de cor ou as figurinhas, representamos a operação no QVL pela manipulação e pelo desenho. Esperávamos que entendessem que as *continhas* eram operações que podemos realizar de diferentes formas. Agíamos de acordo com Spinillo e Magina (2004) quando recomendam o uso simultâneo de vários recursos para que o aluno faça abstrações e chegue à linguagem formal não se limitando ao concreto. Para elas o material concreto seria "uma fotografia do enunciado e do resultado obtido. O grafismo, por sua vez seria o filme, o movimento do raciocínio marcado no papel; traduzido em formas gráficas que podem ser manipuladas" (SPNILLO; MAGINA, 2004, p. 11). No desenho do QVL utilizando tracinhos para representar as unidades e as dezenas o aluno começava a compreender melhor os agrupamentos e a famosa expressão do *vai um* que trouxera de níveis anteriores de aprendizagem.

Para introduzirmos a divisão, começamos a exploração a partir da distribuição das carteiras em nossa sala. Construímos com a turma o mapa de sala deixando-o na parede. No mapa, tivemos que distribuir 25 carteiras em 4 filas. As crianças compreenderam na arrumação concreta da sala que deveríamos ter 4 filas. Mas não ficariam todas iguais porque a mesa e o armário tomam espaço. Para que todas as carteiras fossem colocadas, teríamos duas filas de 7, uma fila com 6 e uma fila com 5 carteiras. Em outra aula, desenhamos no quadro o que fizemos e como construímos o mapa relembrando: *o que foi que eu fiz para caberem todos os meus 25 alunos?* Os alunos voltaram a olhar o mapa construído. Como estavam em duplas tinham que se basear nele para lembrarem como as carteiras ficam distribuídas normalmente. Em seguida, pedimos que fizessem novamente a distribuição das carteiras, mas de maneira que ficassem todas as filas com o mesmo número. Colocamos no quadro: *A sala do 4º ano tem 25 alunos. Como foi dividida se somente podemos ter 4 filas?* Pedimos que nos ajudassem a pensar como seria feito isso. Os alunos Adriano e Jamile nos disseram que deveríamos colocar seis carteiras em cada fila, mas uma fila ficaria com 7 (Estamos usando nomes fictícios para os alunos da turma.). Perguntamos o que poderíamos fazer com a carteira que sobrava se não tivesse espaço. Ana Carolina sugeriu que a colocássemos perto da mesa do professor para alunos que precisam de ajuda. Era uma boa solução que dava para a carteira que sobrava. Dessa forma já levávamos o aluno a pensar no destino do resto da divisão que às vezes costuma ser desconsiderado nas divisões das crianças.

Figura 2. Aprendendo divisão.

Ao mesmo tempo em que fazíamos as conjecturas com os alunos sobre como realizar a divisão, fazíamos também os registros na linguagem escrita e pictórica para que interiorizassem os conceitos que começávamos a explorar. Como nos recomenda Santos (1997), desenharam e escreveram em seus cadernos as respostas que obtinham por meio desse diálogo conosco e com o desenho: *A quantidade de carteiras ficou igual? Por quê? Porque tive que tirar uma carteira da primeira fila? Quanto dá 6 repetido 4 vezes? E por que eu tive que escolher o lugar de colocar a carteira que sobrava? Que operação eu fiz para descobrir como arrumar a sala?* A esta última pergunta vários alunos responderam que foi feita uma multiplicação. Respondíamos que usamos a multiplicação para encontrar a resposta que precisávamos quando descobríamos quantas carteiras teria cada fila. Mas fizemos outra operação que estava relacionada à multiplicação e novamente perguntamos: *que operação é essa em que fazemos grupos?* Agora um aluno disse que fizemos uma divisão. Mostramos então no quadro a operação de divisão, mas sem efetuá-la. Faríamos os cálculos utilizando o material concreto. Distribuímos 25 tampinhas de garrafas para que os alunos os usassem como os referentes ao que estávamos calculando com a divisão dos 25 alunos em 4 filas na sala de aula (SPINILLO; MAGINA, 2004). Assim pedimos para imaginarem que seriam as carteiras. Deveriam distribuí-las em 4 filas. Observando os esquemas de ação dos alunos vimos que uns colocavam uma tampinha em cada grupo de seis contando até o fim; outros colocavam de três em três; outros faziam seis grupos de quatro. Repetíamos que queríamos seis grupos iguais, que seriam as filas e que deveriam distribuir as tampinhas de acordo com essas filas. Finalmente, todos conseguiram distribuir as tampinhas em 4 grupos de 6 localizando a tampinha que sobrava. Levamos o aluno a pensar novamente no que esse objeto simbólico representava. As tampinhas representavam as carteiras, logo a tampinha que sobrara seria a que eles tinham colocado ao lado da mesa da professora. Em seguida fizemos com os alunos um pequeno texto coletivo em que eles ditavam e nós escrevíamos: *Pegamos 25 tampinhas e dividimos em 4 grupos. E deu 6 tampinhas para cada grupo e sobrou 1. 25:4 = 6 e sobra 1, porque 4 X 6 = 24 e sobra 1, 4 x 6 = 24 => 24 + 1 = 25.*

Considerações finais

Poderíamos também ter feito um mapa conceitual coletivo com toda a turma para diagnosticar o que gostavam e o que não gostavam de matemática. O mapa conceitual coletivo talvez nos fornecesse mais informações porque a fala de um aluno influenciaria a de outro. Assim poderíamos talvez acessar outros pensamentos que trariam mais evidências do que já sabem e do que para eles significa fazer matemática. Após a conclusão poderíamos ter conversado com cada aluno sobre o que foi colocado no mapa conceitual individual usando números, palavras frases ou desenhos.

Essas aulas aqui relatadas foram discutidas no grupo e propiciaram outras reflexões. Inclusive motivaram colegas a assistirem a nossa aula e refletirem conosco sobre as nossas ações. A troca de ideias no GEEMES enriquece o que já fazemos em nosso dia-a-dia e, às vezes, traz à tona boas alternativas de aprendizagem que já fazíamos em outros momentos e deixamos cair em desuso, como é o caso do QVL para a compreensão dos reagrupamentos. As continhas, que os alunos já conheciam, puderam ser compreendidas dentro de situações-problema em que exploramos algumas das ideias de multiplicação e divisão. Trabalhamos com as ideias da multiplicação como área e como parcelas repetidas e introduzimos a ideia de divisão como partição. Outras experiências foram desenvolvidas a partir das ideias gestadas no GEEMES, como a utilização da escrita livre para a interiorização de conceitos matemáticos.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

MAGINA, S. 2011. A pesquisa na sala de aula de matemática das séries iniciais do ensino fundamental. Contribuições teóricas da psicologia. **Educar em Revista**, Curitiba: Editora UFPR, n. Especial 1/2011, p. 63-75, 2011.

NOVAK, J.; GOWIN, D. **Learning how to learn**. New York: Cambridge University Press, 1984.

POLYA, G. (1978/1945). **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. (Trabalho original foi publicado em ingles em 1945 in 1945 com o título: How to solve it.).

SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagens e raciocínio em matemática:** métodos alternativos. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ – Projeto Fundão, 1997.

SILVA, S. A. F. **Aprendizagens de professoras num grupo de estudos sobre matemática nas séries iniciais.** 2009. 364f**.** Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SPINILLO, A. G; MAGINA, S. Alguns “mitos” sobre a educação matemática e suas consequências para o ensino fundamental. In: PAVANELLO R. M. (Org.). **Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental**: a pesquisa na sala de aula. v. 2. São Paulo: Col. SBEM, 2004, p. 7-35.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, Curitiba: Editora UFPR, n. Especial 1/2011, p. 15-27, 2011.

VISUALIZAÇÕES E CONSTRUÇÕES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS NO ENSINO MÉDIO

Angélica Bergamini Giostri[1], Sandra Aparecida Fraga da Silva[2]
Licenciatura em Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo – C*ampus* Vitória

Resumo: O presente artigo relata o desenvolvimento de uma atividade de construção de sólidos geométricos aplicada a 2º e 3º anos do ensino médio de uma escola pública parceira do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Neste artigo analisamos a importância de atividades que envolvam construções de protótipos de poliedros para desenvolver a visualização e construção de conceitos matemáticos destacando o valor do uso de material manipulável em aulas de geometria espacial. Notamos que essa atividade contribuiu para uma melhor visualização dos sólidos geométricos e também para questionamentos e discussões sobre conceitos pelos alunos de ensino médio. Identificamos dificuldades semelhantes na realização da atividade e bastante envolvimento dos alunos.

Palavras-chave: visualização. sólidos geométricos. materiais manipulativos.

Introdução

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espirito Santo (IFES), financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), se propõe a intervir na melhoria da formação inicial dos licenciados em Matemática do *Campus* Vitória. Acreditamos que também seja possível intervir na formação continuada dos professores e profissionais envolvidos no ensino de matemática nas escolas nas quais o programa atua e, consequentemente, na melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática nessas escolas, atingindo assim os alunos dessas instituições.

Este artigo apresenta o desenvolvimento e reflexões sobre uma atividade de construção de sólidos geométricos junto ao Pibid em escola de ensino médio com alunos dos 2º e 3° anos. Essa atividade que foi trabalhada inicialmente em aulas de Geometria II na Licenciatura em Matemática do IFES Campus Vitória e numa oficina desenvolvida no Laboratório de Matemática pela professora Sandra. Neste artigo identificamos alguns questionamentos e ações desenvolvidas durante a aplicação da atividade e que levaram a discussões sobre vantagens e desvantagens em utilizar esse tipo de abordagem no ensino de geometria.

Muitos professores não valorizam as aulas de geometria o que prejudica o ensino desse conteúdo, acreditam ainda que a geometria possui rigor nas demonstrações e no entendimento de axiomas e postulados tornando o ensino da geometria

1 Licencianda em Matemática e bolsista do Pibid/IFES. angelica_bergamini@hotmail.com
2 Doutora em Educação (Educação Matemática) e Professora do IFES. Coordenadora de área do Pibid/Matemática. sandrafraga7@gmail.com

distante do aluno da educação básica. Esse tipo de pensamento tem fundamento histórico que se repercutiu em livros didáticos. Percebemos isso quando Niven (1994) diz que “os postulados e axiomas proliferam como coelhos nos livros de geometria nas duas ou três últimas décadas” (NIVEN,1994, p. 49).

Observamos em diferentes situações que os alunos possuem dificuldades ao abordarem a geometria espacial. A maneira como esse conteúdo é abordado nos livros didáticos e nas aulas de matemática observadas não propicia a visualização dos objetos tridimensionais. Assim, os alunos acabam trabalhando a visualização de figuras em 3D no espaço bidimensional o que desfavorece a percepção do total e do real. O desenvolvimento de abordagens que tratem a visualização dos sólidos geométricos se faz necessário já que essa “visualização é um instrumento necessário na formação dos conceitos geométricos” (HERSHKOWITZ,1994a, p. 58).

Fundamentação teórica

A questão da visualização está presente em discussões sobre o ensino da geometria, no nosso caso a espacial. Para entender o conceito de visualização e sua importância para a aprendizagem de conceitos geométricos utilizamos Hershkowitz (1994a, p. 9) que afirma que a “visualização geralmente se refere à habilidade de representar, transformar, gerar, comunicar e refletir sobre informação visual”. Percebemos, portanto, a variedade de inferências no processo ensino aprendizagem que pode ser desenvolvido quando abordamos de maneira adequada a visualização. A mesma autora acrescenta ainda, que a visualização envolve tipos de processos mentais que são necessários na geometria e em outras áreas da matemática.

Destacamos o papel da visualização no desenvolvimento de conceitos geométricos, porém, Hershkowitz (1994b) explora a complexidade do trabalho com visualização e aponta que essa abordagem atua em duas direções que são opostas. A primeira diz que para formar a imagem de um conceito e de seus elementos utilizamos da visualização ou identificação de seus elementos. A segunda afirma que a limitação aos elementos visuais pode empobrecer a imagem conceitual. Portanto, necessitamos trabalhar de forma que os alunos tenham uma imagem mental dos objetos geométricos, que possam utilizar seus diferentes sentidos e conhecimentos para a construção das imagens mentais, sabendo que precisamos realizar diversas ações em momentos variados.

Quando tratamos da visualização do espaço tridimensional, percebemos que um trabalho adequado pode trazer ao aluno a oportunidade de usarem muitas das relações espaciais e de construírem diferentes conceitos matemáticos. Para desenvolver essa habilidade de visualização Pohl (1994) aponta para a construção real de protótipos, segundo essa autora

> A melhor maneira de aprender a visualizar o espaço tridimensional é construindo objetos que mostrem os conceitos

> espaciais. Construindo poliedros os alunos têm oportunidade de observar e usar muitas relações espaciais. Recursos visuais também estimulam o pensamento criativo (POHL, 1994, p. 178).

Destacamos dessa forma a importância de desenvolver atividades em que os alunos construam sólidos geométricos e que façam inferências sobre suas construções, propiciando uma visualização de protótipos que auxiliem na construção dos conceitos envolvidos. Esse trabalho requer reflexão do processo de ensino e aprendizagem e precisa ser analisado, pois

> [...] a utilização de objetos manipulativos é uma abordagem diferenciada que instiga o aluno a trabalhar colaborativamente, mas que exige mudanças nas posturas de professores e alunos. Vale ressaltar que o professor não se pode restringir ao uso de objetos manipulativos, pois estes apresentam limites; mas, também, não deve deixar de utilizá-los, visto que eles auxiliam no desenvolvimento da intuição, da comparação, da formulação de hipóteses, da elaboração de estratégias e de sua análise, bem como na resolução propriamente dita [...] (GOMES; SANTOS; GASPARINI; ELOY, 2008, p.145).

Conforme já pontuamos a construção de sólidos geométricos contribui, pois com o auxilio do material manipulável o aluno pode visualizar objetos de ângulos que figuras do livro não proporcionam, além de manipular o objeto e investigar as diferentes maneiras de produzi-lo e de organiza-lo. Mas a ação do professor precisa ir além dessa construção.

Pensamos que a construção de sólidos geométricos contribui para aprendizagens sobre a constituição das formas tridimensionais, pois favorece discussões e questionamentos ao longo da realização da atividade. Concordamos com Kaleff (2003) quando afirma que

> o questionamento que surge ao longo das construções permite ao aluno conjecturar sobre diversas situações geométricas relevantes para as conclusões finais a serem alcançadas. O constante questionamento sobre as características das estruturas das arestas construídas com o material concreto e sobre o que o aluno observa lhe proporciona a oportunidade de tomar consciência das diversas propriedades geométricas que se desejam enfatizar (KALEFF, 2003, p. 139).

Durante as construções os alunos são desafiados a resolverem problemas e buscarem alternativas para a solução do que estão produzindo. A utilização de diferentes construções favorece aprendizagens diversificadas, por exemplo, construir cascas de sólidos a partir de planificações de faces constitui um saber diferente da construção de esqueletos de sólidos utilizando varetas ou canudinhos.

Materiais e métodos

Nas turmas de 2º e 3º anos do ensino médio, algumas das propostas realizadas foram adaptadas a partir de atividades do livro do Bigode (2000) e de Kaleff e Rei

(2004). Para a construção de esqueletos de sólidos utilizamos como materiais o fio de nylon junto com canudos de refrigerante, e palitos de dente com massinha de modelar. Quando realizamos as construções de cascas de sólidos recorremos ao papel cartão e elástico para dinheiro.

Para construção com canudos e fio de nylon, foi utilizado um pedaço de nylon suficientemente grande para poder passar por dentro dos canudos que constituíam as arestas do solido em questão. Para formar as arestas de uma face era preciso passar o fio pelos canudos na quantidade de arestas necessárias para ter a face desejada. Os alunos precisavam pensar e criar estratégias para a construção das demais faces até formar os esqueletos de sólidos escolhidos.

Na construção com palitos de dente e massinha de modelar, o sólido formado era semelhante ao de canudos, porém a forma de construir era diferente, com a massinha de modelar preparava bolinhas, que ficariam no lugar dos vértices e depois encaixava os palitos nelas formando as arestas do sólido que desejasse.

Para construir as cascas dos sólidos com papel cartão e elástico para dinheiro (fig. 1), foi preciso apresentar a forma correta de trabalhar com o compasso para riscar quadrados, retângulos e triângulos no papel cartão somente com o auxílio de régua e compasso. Após desenhar e cortar as faces era necessário fazer um vinco cerca de um centímetro para dentro do recorte. Apos essa etapa, recortava as pontas em formato de v e dobrava as partes vincadas para prender o elástico. Com o material pronto bastava unir as faces com a borracha para dinheiro.

Figura 1 – Materiais utilizados nas aulas

Desenvolvimento

Conforme já citamos, a ideia de trabalharmos a construção de sólidos geométricos surgiu das aulas de geometria II lecionada pela coordenadora desse subprojeto de matemática Ensino fundamental Sandra Fraga e de uma oficina ministrada pela mesma no Laboratório de Matemática. Nas aulas e na oficina aprendemos a realizar construções com o material já mencionado.

Nas duas turmas dos 3º anos a atividade foi realizada com 60 alunos e teve como propósito introduzir o conteúdo de geometria espacial. Pelo fato de os alunos ainda não terem visto o conteúdo, houve algumas dificuldades no desenvolvimento da construção dos sólidos, principalmente quando trabalhamos com a nomenclatura dos sólidos e dos elementos que o constitui.

Com essas turmas a atividade foi realizada em dois dias, sendo no primeiro trabalhado as construções de esqueletos de sólidos com massinha de modelar e palito de dente e ainda canudo e fio de nylon e no segundo dia as construções de cascas de sólidos com papel cartão e elástico para dinheiro, em ambos os dias pedimos que se separassem em grupos de no máximo cinco alunos para facilitar o atendimento a todos. Com os canudos e fio de nylon fizemos a construção de um tetraedro para dar início à aula, ainda levamos outros modelos como icosaedro e prismas prontos para estimular os alunos a tentarem ir além do que havíamos proposto. Depois de fazer um tetraedro com canudo, deixamos livre para que tentasse em grupos construir esqueletos utilizando os materiais disponíveis. Percebemos que a maioria dos alunos preferiu fazer a construção com massinha de modelar e palito de dente, pois achavam que era a forma mais fácil de fazer a construção, porém depois de ver outras construções prontas acabaram se empolgando para também tentar com canudos e fio de nylon. Durante as construções surgiram alguns questionamentos sobre as arestas e vértices que ao longo da construção foram sendo sanadas. E esses questionamentos são muito importantes para o entendimento da geometria (KALEFF, 2003).

No dia da construção de cascas de sólidos deixamos uma aula só para essa atividade, ao anunciarmos que deveriam utilizar régua e compasso, os alunos ficaram receosos, pois não tinham noção de como se trabalhava com compasso, passamos em cada grupo mostrando como se media um quadrado e um triângulo no papel cartão utilizando somente as ferramentas que havíamos disponibilizado. Com essa atividade notamos que somente quem tinha um pouco de domínio com o compasso ficou mais motivado em fazer a atividade, porém ao percebermos isso mostramos que podiam ajudar na construção fazendo os outros passos da atividade, que era montar os sólidos. A partir daí a atividade ficou mais dinâmica e produtiva.

A escolha da sequência da atividade se deu por diferentes razões. Iniciamos com a construção de esqueletos, pois com essas figuras visualizamos somente vértices e arestas, como estávamos introduzindo a matéria era importante que fossem aprendendo aos poucos e assim somente em seguida apresentamos as cascas onde também podem ser observadas as faces dos sólidos.

Após algumas aulas realizamos uma avaliação diagnóstica para descobrirmos o que haviam achado da construção de sólidos. Tivemos alguns depoimentos de alunos diziam estar gostando da atividade, pois o professor trabalhava muito com o quadro. A avaliação era formada por três perguntas que seguem:

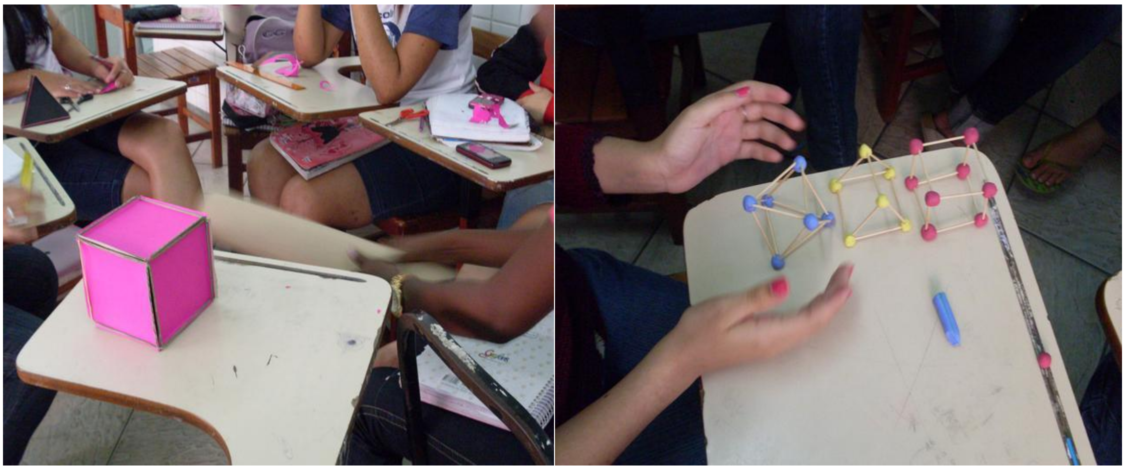
1) O que você achou da atividade?

2) O que você aprendeu com a atividade?

3) Quais as dificuldades encontradas?

Com a análise dessas perguntas podemos ressaltar que a maior dificuldade encontrada pelos alunos foi na hora de dar nome aos sólidos e perceber ainda que gostaram da atividade proposta a eles (GIOSTRI; FALQUETTO, SILVA, 2012). Não abordaremos a questão da avaliação neste artigo[3].

Figura 2 – Alunos construindo sólidos em casca e em esqueletos



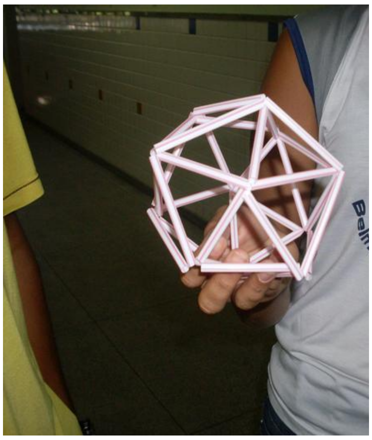
Nas três turmas dos 2º anos a atividade foi realizada com 50 alunos e nessas turmas o conteúdo de geometria já havia sido abordado, portanto a atividade foi proposta para reforçar a matéria e ajudar os alunos com as nomenclaturas dos sólidos geométricos (fig. 2). Nessa turma as dificuldades foram menores tendo em vista que já conheciam o conteúdo. Com essa turma não foi possível fazermos a avaliação após a oficina, mas fizemos algumas perguntas antes e durante o processo e percebemos que a maior parte da turma já conhecia alguns sólidos construídos.

Nessas turmas também foi dividido a atividade em 2 dias da mesma forma que com os 3º anos, não foi utilizado palito de dente e massinha de modelar, da mesma forma começamos pela construção de esqueletos com canudo e fio de nylon, em seguida apresentamos a construção das cascas de sólidos com papel cartão e elástico para dinheiro. Nessas turmas os alunos também tiveram dificuldades no manuseio da régua e compasso, mas com o nosso auxílio conseguiram completar as atividades. Como no primeiro dia só foi trabalhado canudo e fio de nylon, os alunos puderam ousar mais nas construções e duas alunas até arriscaram na construção de icosaedros. Já com o papel cartão e borracha para dinheiro, construíram apenas os que pedíamos (fig. 3).

3 Ver GIOSTRI; FALQUETTO; SILVA, 2012.

Ao aplicar a atividade em ambos os grupos, apesar da diferença de procedimento notamos que as dificuldades encontradas foram semelhantes, porém nos 2º anos elas eram menos frequentes.

Figura 3 – Outras construções de esqueletos e cascas de sólidos geométricos



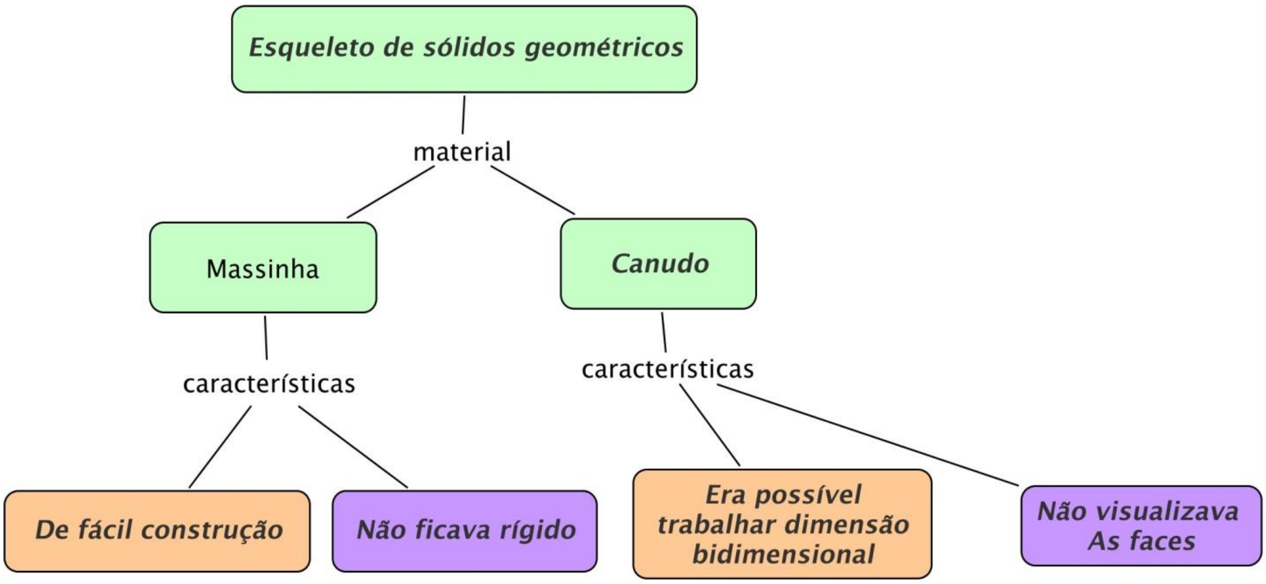
Nas aulas de geometria ministradas para o terceiro período da licenciatura em matemática o procedimento não foi diferente, com o objetivo de iniciar o conteúdo a professora trabalhou construções de sólidos e as dificuldades geradas no momento também foram em dar nome aos sólidos. Porém nessas aulas só foi construídos esqueletos utilizando palito de dente e massinha de modelar e canudo e fio de nylon, as cascas de sólidos só foram construídas na oficina, onde a maior dificuldade foi no manuseio da régua e compasso.

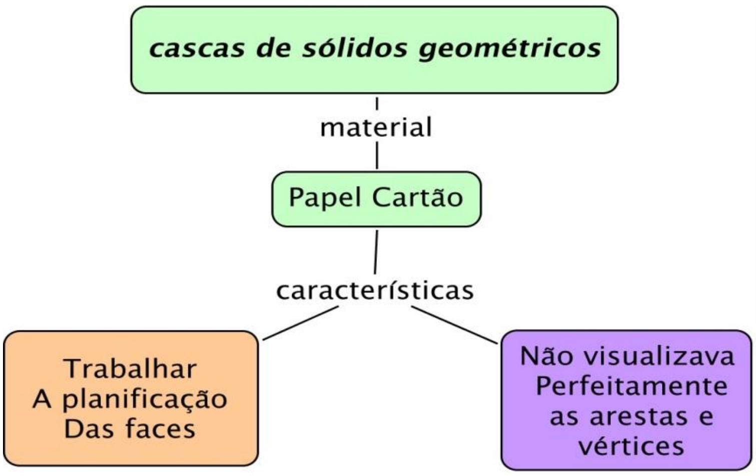
Em todos os grupos houve grande envolvimento dos alunos na atividade, deixando a aula mais dinâmica. Com a atividade pudemos mostrar aos alunos a questão das figuras rígidas, que possuem triângulos nas suas faces e figuras não rígidas, que possuem outros polígonos nas faces, pois já havíamos visto nas aulas de geometria na licenciatura.

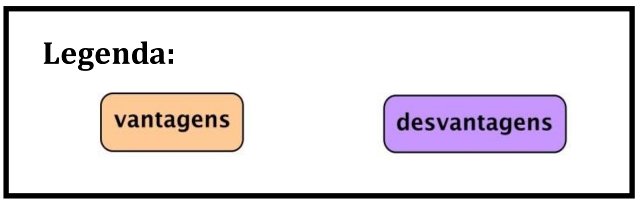
A atividade mostrou-nos algumas dificuldades quanto ao material utilizado para a construção, pois ao construir os sólidos com palito de dente e massinha, não ficava rígido mesmo sendo uma figura que possui triângulos em suas faces, pois a massinha era mole ficando assim frágil. Com o papel cartão se não auxiliássemos na construção, a parte onde prende a borracha para dinheiro podia ficar muito pequena não sustentando a borracha, além de não dar para visualizar perfeitamente as arestas, por isso a união das duas aulas foram importantes para que conseguissem perceberem as arestas, vértices e faces de diferentes maneiras.

Com as construções utilizando canudo e nylon, é possível que o aluno visualize o sólido além da dimensão tridimensional, a dimensão bidimensional, o que já está mais habituado a ver, pois o material utilizado é flexível proporcionando uma melhor manipulação. Com o papel cartão o sólido pode ser desmontado levando o aluno a enxergar a planificação das faces dos sólidos geométricos.

Essas construções são protótipos e cada uma tem suas vantagens e desvantagens, que favorecem a visualização de arestas e vértices no caso dos esqueletos ou das faces nas cascas. Defendemos que é bom usar os diferentes modos para que os alunos possam aprender diferentes maneiras de verificar elementos que só são possíveis visualizar com o auxílio do material tridimensional, até mesmo com o uso de embalagens.







Conclusão

A construção de sólidos geométricos usando materiais alternativos objetivou despertar nos alunos, tanto licenciandos quanto estudantes de ensino médio uma melhor visualização dos sólidos geométricos no espaço tridimensional, bem como o aprendizado dos conceitos relacionados a esses sólidos.

Atividades alternativas como essa na licenciatura são atraentes e contribuem para nossa própria formação de conceitos geométricos que muitas vezes não foram bem trabalhados na educação básica. Ainda complementam o aprendizado dos futuros professores enriquecendo a formação inicial. Dessa forma, como futuros professores e bolsistas do PIBID, nós tivemos a oportunidade de levar nossos conhecimentos à escola parceira do projeto, essa iniciativa nos trouxe muitos benefícios, pois visualizamos como a atividade funcionou dentro do ensino médio.

Ter ciência do processo e de dificuldades pode favorecer o modo como proceder em sala de aula e a maneira de diagnosticar possíveis dúvidas dos alunos, além de que o professor pode formular perguntas relacionadas às dúvidas para os alunos a fim de buscar qual o conhecimento alcançado depois da atividade.

Com o material manipulável é possível na geometria espacial visualizar a dimensão tridimensional dos sólidos construídos, o que antes só conseguiam observar na dimensão bidimensional com figuras de livros didáticos e desenhos do quadro. É importante que o professor saiba unir as duas formas de apresentar ao aluno a geometria espacial, para uma melhor aprendizagem do conteúdo.

Agradecimentos

Agradecemos ao IFES, a CAPES, ao PIBID pela oportunidade de estar vivenciando uma sala de aula não como aluno, mas como futuro professor. Agradeço a coordenadora do subprojeto por ter acreditado que faríamos a diferença, ao professor supervisor que nos acolheu na escola parceira, as colegas do PIBID que trabalharam para que desse certo. Agradeço a meu esposo pela paciência em me ouvir e dar sua opinião.

Referências

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática** – Hoje é feita assim. Vol. 7. São Paulo: FTD, 2000.

KALEFF, Ana Maria; REI, Dulce M. Varetas, canudos, arestas e... sólidos geométricos. In: HELLMEISTER, Ana Catarina P. [et al.] **Explorando o ensino da matemática**: atividades volume 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004, p. 115-119.

KALEFF, Ana Maria, **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao calculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. 2ª edição. Niterói, RJ, EduFF, 2003.

GIOSTRI, Angélica B.; FALQUETTO, Jéssica M.; SILVA, Sandra A. F. da. Uma experiência do Pibid/Ifes com avaliação diagnóstica em matemática no ensino médio. In: II Semana da Matemática, III Seminário de Educação Matemática e Educação Tecnológica e IX Encontro Capixaba de Educação Matemática. **Anais...** Vitória, 2012.

GOMES, Adriana A. Molina; SANTOS, Aparecida dos; GASPARINI, Paulo Sérgio; ELOY, Thiago Augusto. Calculando áreas e perímetros: uma experiência (com)partilhada. In: ADAIR, Mendes Nacarato; GOMES, Adriana Ap. Molina; GRANDO, Regina Célia (orgs.). **Experiências com geometria na escola básica:** narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos, SP, 2008, p. 133-147.

HERSHKOWITZ, Rina. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro: o grupo, n. 32, ano XVIII, p. 3-31, 1994a.

HERSHKOWITZ, Rina. Visualização em geometria – as duas faces da Moeda. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro: o grupo, n. 32, ano XVIII, p. 45-61, 1994b.

NIVEN, Ivan. A geometria pode sobreviver no currículo do curso secundário? In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinado geometria.** São Paulo, Atual, 1994, p.49.

POHL, Victoria. Visualizando o espaço tridimensional pela construção de poliedros. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinado geometria.** São Paulo, Atual, 1994, p. 178.

TÉCNICAS DE DISSECÇÃO NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS: EUCLIDES E LEONARDO DA VINCI

Rodolfo Chaves[1], Caio Lopes Rodrigues[2]
Instituto Federal do Espírito Santo – *Campus* Vitória

Resumo: Este texto é fruto de pesquisas que desenvolvemos no Laboratório de Práticas de Ensino Integradas, Programa LIFE/CAPES, a partir de sessões plenárias do Grupo de Pesquisa Gepemem/Ifes. A proposta é tratar de forma interativa e manipulativa o teorema de Pitágoras abordando historicamente a demonstração por dissecção adotada pelos pitagóricos e também por Leonardo Da Vinci e apresentar possibilidades de abordagens diferenciadas de Matemática e História da Matemática na sala de aula. Este trabalho fundamenta-se a partir da pesquisa de natureza qualitativa, bibliográfica e exploratória, mas também do tipo participante, pois os procedimentos foram discutidos e aplicados em oficinas ministradas a professores de Santa Maria, RS e Juiz de Fora, MG.

Palavras-chave: cenário investigativo de aprendizagem. história da matemática; os elementos; demonstração por dissecção; teorema de Pitágoras.

Introdução

O processo em curso é destinado àqueles que buscam trabalhar em um cenário investigativo de aprendizagem a partir da História da Matemática e com instrumentos manipulativos que privilegiem a ação (dinâmica) no lugar do produto (resultado).

A expectativa é que essa prática seja entendida como uma ferramenta pedagógica de reflexão de nossas práticas docentes e que sirva como elemento norteador na elaboração de planos e roteiros de atividades que coloquem o aluno como ator e coautor de um processo investigativo.

Apresentaremos, a partir da técnica da dissecção ou da decomposição, duas demonstrações do teorema de Pitágoras. Em diversas rodas de conversas (plenárias, oficinas e minicursos) com licenciandos e professores expusemos as técnicas de demonstração e discutimos possibilidades de procedimentos de ensino da temática em questão.

Percurso metodológico

Tomamos *Os Elementos*, atribuída a Euclides, uma das obras mais influentes na História da Matemática. Nela, os princípios da Geometria Euclidiana foram

[1] Doutor em Educação Matemática pela UNESP – Rio Claro. Docente do curso de Licenciatura em Matemática do Ifes, campus Vitória. Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática Pura, Matemática Aplicada e Educação Matemática (Gepemem). rodolfochaves20@gmail.com
[2] Licenciando em Matemática e membro do Gepemem. caiolr1988@hotmail.com

deduzidos a partir de um conjunto de axiomas. É composta por treze volumes[3] e cobre toda a Aritmética, a Álgebra e a Geometria conhecidas no mundo grego da época, reunindo trabalhos de predecessores, como Tales, Pitágoras, Hipócrates e Eudoxo. Euclides sistematizou todo o conhecimento geométrico dos antigos, intercalando os teoremas então conhecidos com a demonstração de muitos outros, que completavam lacunas e davam coerência e encadeamento lógico ao sistema por ele criado.

O teorema de Pitágoras é apresentado na proposição 47, Livro I, de *Os Elementos*: *Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto*. (BICUDO, 2009, p.132). Bem como o seu recíproco (proposição 48, Livro I): *Caso o quadrado o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados dos dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto.* (BICUDO, 2009, p.134).

O que Eves (2004) denomina de demonstração por decomposição, Bicudo (2009) classifica como demonstração por dissecção, técnica utilizada pelos gregos encontrada em vários livros de *Os Elementos*. Tal técnica, utilizaremos a seguir para demonstrar o teorema de Pitágoras.

Observemos as figuras a seguir:

Figura 1. Quadrado de lado $a + b$.

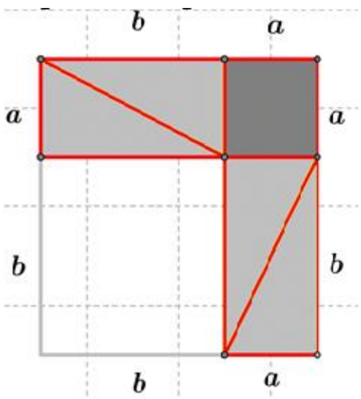
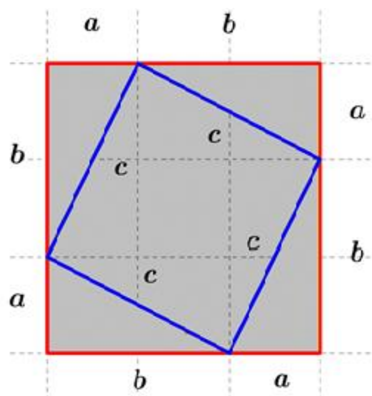


Figura 2. Quadrado de lado $a + b$.

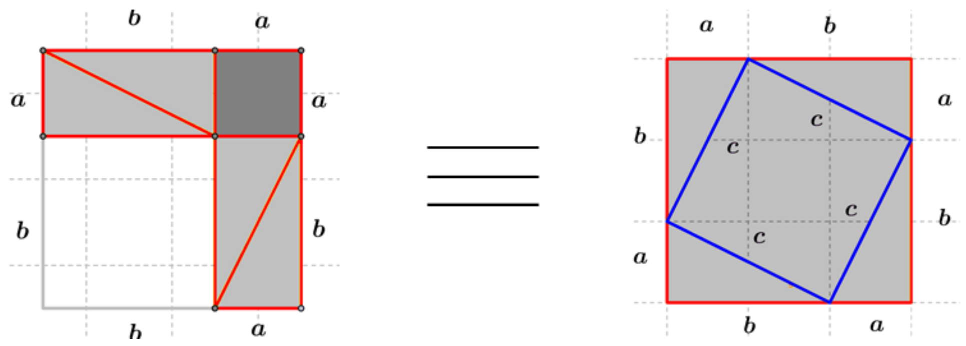


Sejam a, b e c respectivamente os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo (Figura 3). O quadrado da figura 1 é decomposto em seis partes: um quadrado de área a^2; um quadrado de área b^2; quatro triângulos retângulos de área $ab/2$. O quadrado de lado $(a + b)$ da figura 2 é decomposto em cinco partes: um quadrado de área c^2 e quatro triângulos retângulos de área $ab/2$. Tomemos as duas figuras (2 e 3) e *dissectemos*, subtraiamos partes iguais (congruentes – áreas equivalentes) de partes iguais, nas figuras de áreas correspondentes. Vejamos que sobrarão os

[3] 5 de Geometria Plana; 3 de números; 1 de teoria das proporções; 1 de incomensuráveis; os 3 últimos de Geometria Espacial.

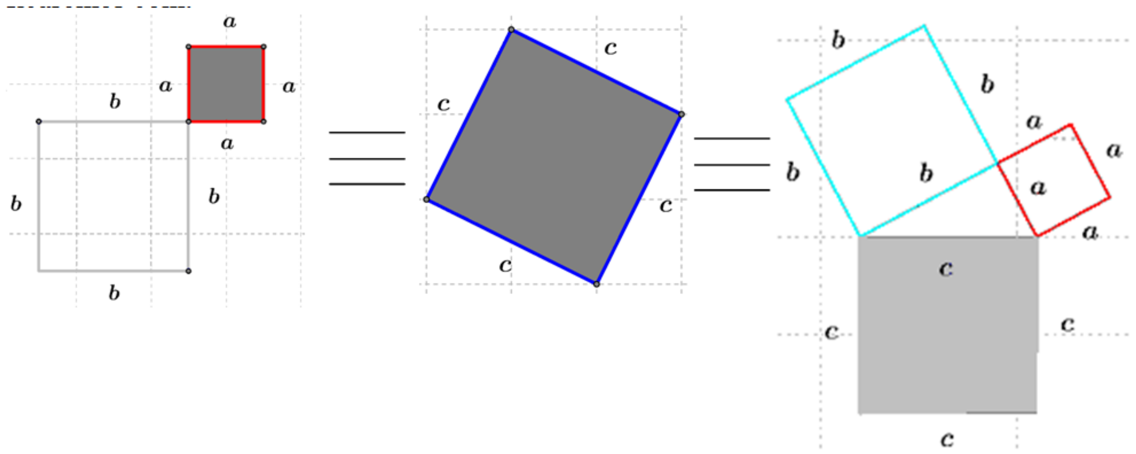
quadrados de áreas a^2, b^2 e c^2. Donde se conclui que a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores.

Figura 3. Quadrado de lado congruentes de áreas $(a + b)^2$.



No esquema que apresentamos na figura 4, mostramos que os quadrados possuem áreas equivalentes e ambos têm lados medindo $(a + b)$. Se retirarmos as partes iguais (congruentes), das figuras 1, 2 ou 3, ficaremos com:

Figura 4. Quadrado de áreas congruentes: $a^2 + b^2 = c^2$.



No entanto, para provarmos que a parte central da segunda decomposição ou dissecção (figura 4) é efetivamente um quadrado de lado c, Eves (2004) nos lembra de que:

> ... precisamos usar o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos. Mas o *Sumário Eudemiano* atribuiu esse teorema sobre triângulos em geral aos pitagóricos. E como uma demonstração desse teorema requer, por sua vez, o conhecimento de certas propriedades sobre retas paralelas, credita-se também aos pitagóricos o desenvolvimento dessa teoria (EVES, 2004, p. 104).

Bongiovanni (2014) destaca que a demonstração supracitada (figuras 3 e 4) parte da premissa de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo equivale a dois retos e, portanto, desse fato decorre que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é equivalente a quatro retos. Assim, se um quadrilátero possui três ângulos retos então o quarto ângulo será também reto; donde se conclui também que existem retângulos e quadrados. Portanto a prova convincente do teorema de Pitágoras por dissecção (figuras 3 e 4) traz hipóteses "escondidas", tendo como ponto nevrálgico que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo equivale a dois retos. Esta proposição apresentada em *Os Elementos*, no livro I (proposição 32[4]) depende do famoso e discutido 5º postulado de Euclides. Aliás, a discussão do 5º postulado[5] de Euclides é contundente para observarmos que nem toda crise leva à incredibilidade. Foi na tentativa milenar de provar que o quinto postulado estava errado, que outras Geometrias foram desenvolvidas (como, por exemplo, a esférica e a hiperbólica).

Santos; Silva; Lins (2012) cita Loomis (1968) e chama atenção para o fato de que a demonstração por decomposição, ou dissecção, do teorema de Pitágoras é uma prova experimental, do tipo geométrico, e permite a participação do aluno na construção do material concreto como também na (des)montagem do quebra-cabeça. Segundo tal referencial, "a interação do aluno com este tipo de demonstração permite despertar o seu interesse e aguçar a sua criatividade, tornando-o um agente ativo na construção do seu conhecimento.".

No final do século XV e início do século XVI, deparamo-nos com uma figura ímpar. Artista, filósofo, físico, engenheiro, arquiteto, cartógrafo, geólogo, astrônomo, anatomista, compositor, poeta, cozinheiro, matemático, músico, naturalista, inventor e escultor. Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), artista italiano, foi um dos mais importantes pintores do Renascimento. Seus trabalhos e projetos científicos quase sempre ficaram escondidos em livros de anotações (muitos escritos em códigos[6]), mas foi como artista que conseguiu o reconhecimento e o prestígio das pessoas de sua época. Da Vinci consegue a façanha de juntar ciência e Arte; conseguiu manipular a beleza de suas criações utilizando artífices científicos e, em contrapartida, tornou seus estudos científicos de beleza insofismável aos olhos doutrem, utilizando a Arte.

Os escritos mais importantes de Leonardo apontam sua relação com a Matemática. Suas coleções mais importantes são 10 *códigos*, dos quais envolvendo Matemática são: *Código Atlântico*; *Código Arundel*; *Códigos de Madri*; *Códigos do Instituto de França*; *Códigos Foster*.

[4] *Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos.* (BICUDO, 2009, p.122)
[5] "*E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado do qual estão os menores do que dois retos.*" (BICUDO, 2009, p. 98).
[6] À obra Da Vinci adota-se o nome de *Código* para cada uma de suas coleções. Há cerca de 5.000 páginas de apontamentos que possuem a peculiar característica de terem sido grafados da direita para esquerda e espelhadas.

> As considerações geométricas e as construções geométricas exatas que foram encontradas até agora no famoso *Código Atlântico* e nos outros manuscritos impressos não são suficientes, embora tudo que neles se leia seja original, para considerar Leonardo entre aqueles que souberam acrescentar alguma página à geometria herdada dos gregos... Além disso, a ideia, manifestada por ele, de obter a retificação da circunferência fazendo escorregar uma roda sobre uma haste reta, confirma a opinião de que ele se interessava por geometria apenas na medida em que essa ciência resultava ser útil aos pintores e aos arquitetos. É uma conclusão que se confirma nas aplicações por ele realizadas de algumas lúnudas de Hipócrates... à quadratura de figuras complicadas, esteticamente admiráveis, mas carentes de valor científico (LORIA, 1929-1933, p. 263 apud. BAGNI; D'AMORE, 2011, p. 62).

Não há dúvida de quanto Leonardo produziu de Matemática e mesmo que os sépticos aleguem ser aquém da Matemática que hoje se conhece, lembramos ser muito além daquela praticada em sua época. Leonardo fora um amante incondicional da Geometria[7] e dedicou-se ao trabalho com figuras geométricas. Sua realização mais notável neste campo é o *poliédrico*, conjunto de ilustrações nas obras "*Summa de Arithmetica, Geometrica, proportioni et proportionalita*" (1494) e "*De divina proportione*" (1509) de Luca Pacioli.

Resultados e discussão

Um material didático rico, de quebra-cabeça em EVA, feito nos moldes do Tangram, para demonstração do teorema de Pitágoras, é apresentado em Lamas & Mauri (2014) cujo título é "o teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado"[8]. Pensamos que essa interação contribui para se romper com a inércia posta a partir do ambiente de aprendizagem vigente, peculiar à Matemática excludente. Assim, entendemos que a interação sugerida faculta que se trabalhe com ambientes que perpassem cenários à investigação.

Visitar a História da Matemática para analisar processos, como pensavam e se portavam diante de certas circunstâncias nossos ancestrais é salutar, mas também podemos partir daí para outras questões, como o que se pode verificar na proposta contida em Lamas & Mauri (2014). Se conciliarmos então o recurso de uso de material manipulativo para provar as relações métricas como consequência das respectivas semelhanças dos triângulos advindos de um triângulo retângulo e os formados a partir da altura sobre a hipotenusa, acrescenta-se o tato e a manipulação permite que todas as relações sejam construídas a partir daí, como sugerida em Chaves (2001, p. 193-195).

---

[7] "Espalhadas entre os manuscritos de Leonardo da Vinci, junto com desenhos, anotações, rabiscos e cálculos, há também diversas criações poliédricas, fruto do que *Leonardo denominava sua* '*recreação geométrica'*. Com infinitas possibilidades de variação, esses poliedros regulares e semirregulares *parecem ter fascinado Leonardo*". (ATALAY, 2008, p. 144).

[8] http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2004/artigos /eixo10/oteoremadepitagoras.pdf

Propostas como a apresentada, em visita à História da Matemática, com o propósito de criar um cenário investigativo à aprendizagem, possibilitam, por exemplo, que retomemos o raciocínio dedutivo, usado pela primeira vez em Matemática por Tales e, em seguida, por Pitágoras. Mais ainda, possibilita que passássemos do "como fazer" para o "por que" fazer? Isso porque os critérios de cientificidade também perpassavam, na época, do "como" para o "por que". Talvez nos falte isso nas salas de aula. Urge transitarmos – no que tange tanto os conteúdos programáticos em questão bem como os recursos didáticos adotados – do "como" para o "por que",

Por exemplo, para os pré-helênicos, afirmar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes era uma verdade considerada tão óbvia que bastava sobrepor um ângulo ao outro. Qual professor ainda não adotou a técnica de dobradura em papel para sobrepor ou justapor ângulos, com o intuito de justificar por visualização a verdade posta? Só que tal recurso didático[9] – das dobraduras – já era adotado há muito tempo, em moldes de madeira com dobradiças em linhas que seriam eixos de simetria.

Lembremo-nos que quaisquer tentativas de dedução por recursos algébricos não retomam a proposta de uma Geometria dedutiva de Tales ou Pitágoras. O processo dedutivo da época deveria ser apresentado por régua e compasso. Não nos esqueçamos de que falamos de uma época inclusive que antecede à Axiomática de Euclides, portanto, demonstrar por decomposição que a soma dos ângulos internos de um triângulo era dois ângulos retos era (e continua sendo) um processo que, por não incluir artifícios algébricos não implica em possuir menos rigor. Mas matematizar implica necessariamente em manter rigor?

Da Vinci, que além de amigo também foi aluno de Pacioli, que nutria fascínio pela Geometria, desenvolveu uma "demonstração por experimentação" ou "demonstração por decomposição", ou como vimos anteriormente, demonstração por dissecção, apresentada em Loomis (1968, p.129), do teorema de Pitágoras.

Santos; Silva; Lins (2012) a partir de leituras de Lima (1998, p. 55) destaca que os quadriláteros *LCAH*, *HBKL*, *DEFG* e *DBAG* são congruentes e, consequentemente os hexágonos *AGFEDBA* e *AHBKLC* têm a mesma área; donde resulta que a área do quadrado *ABKC* é a soma das áreas dos quadrados *AGFH* e *EDBH*: "Da Vinci se baseou no princípio da comparação de áreas. Ele fez uso de uma forma mais complexa e de difícil visualização. Utilizou as áreas dos quadriláteros formados a partir de uma figura desenhada anteriormente para comprovar suas equivalências e assim comprovar a relação existente entre os lados dos triângulos retângulos." (LIMA, 2006, apud: SANTOS; SILVA; LINS, 2012).

[9] Adotado inclusive nos processos de formação de professores da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES), programa do Ministério de Educação e Cultura, nos anos de 1960, por Júlio Cesar de Melo e Souza (Malba Tahan).

Figura 5: Demonstração de Leonardo Da Vinci do teorema de Pitágoras

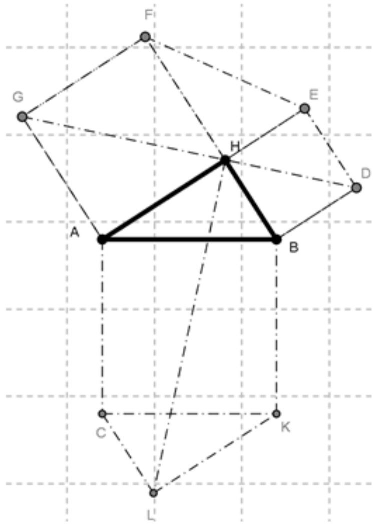
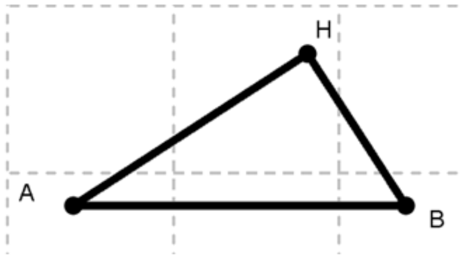


Figura 6. 1ª hipótese – ΔABH é retângulo em H.



Fonte: Loomis (1968, p. 129)

Loomis (1968, p. 129), na demonstração 46, apresenta a mesma figura e alega não ser necessário explanar a respeito da construção e, das 23 linhas destinadas à demonstração de Da Vinci; apenas 8 destinam-se às comparações que levam à demonstração por decomposição.

No entanto, propomos que debulhemos a figura 6 para outra demonstração, por decomposição, a partir do que foi exposto.

{1} Tomemos como 1ª hipótese que o triângulo ΔABH é retângulo em H (Cf. figuras 5 e 6).

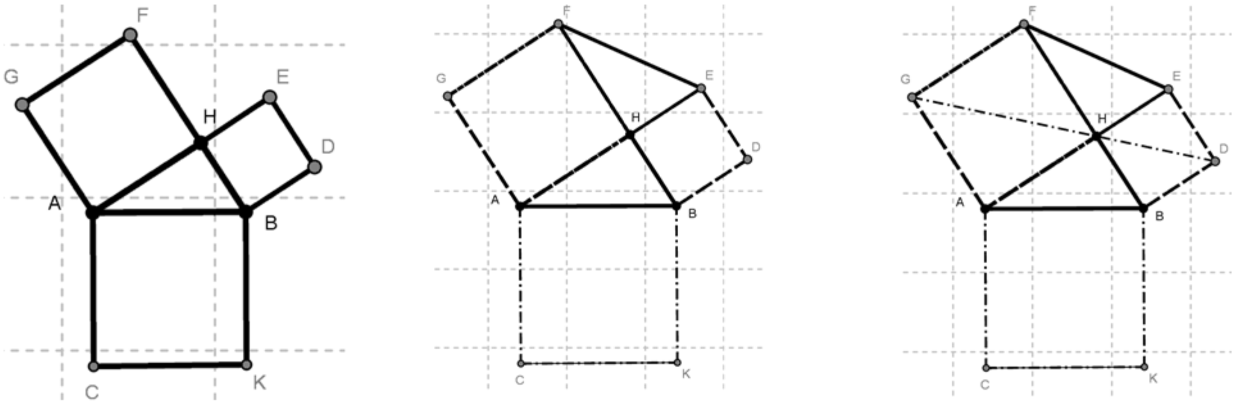
Como tese, ou seja, aquilo que queremos mostrar, é que a soma das áreas dos quadrados *BDEH* e *AGFH* é igual à área do quadrado *ABKC*.

{2} Agora tracemos a partir dos lados do ΔABH os quadrados *ABKC*, *AGFH* e *EDBH*. (Cf. figura 7).

{3} Ligando os vértices *F* e *E* formamos o ΔHFE, retângulo em H e, portanto, congruente ao ΔABH (Cf. figura 8).

{4} Logo a área dos triângulos ΔHFE e ΔABH são iguais (Cf. figura 8).

Figura 7. **Figura 8.** **Figura 9.**



{5} $\overline{GH}$ e $\overline{HD}$ são diagonais dos quadrados *AGFH* e *EDBH*, respectivamente. Como *H* é um ângulo reto, $\overline{GD}$ é um segmento de reta que passa por *H* (Cf. figura 9).

{6} Mas veja que os triângulos retângulos ΔGFH e ΔGAH são congruentes e, portanto têm áreas iguais, pois são formados a partir da diagonal $\overline{GH}$ do quadrado *AGFH* (Cf. figura 9).

{7} Analogamente os triângulos retângulos ΔHED e ΔDBH também são congruentes e, consequentemente, têm áreas iguais, pois são formados a partir da diagonal $\overline{HD}$ do quadrado *EDBH* (Cf. figura 9),

{8} Assim, de {5}, {6} e {7}, temos que os quadriláteros *GFED* e *GABD* são congruentes.

{9} Se traçarmos uma paralela à $\overline{HB}$ passando por *C* e uma paralela à $\overline{AH}$ passando por *K*, formaremos o ΔCLK, retângulo em *L* e congruente[10] ao ΔEHF e ao ΔBHA (Cf. figura 10).

{10} Observemos que no hexágono *AHBKLC* temos $\overline{AH}$ // $\overline{LK}$ e $\overline{HB}$ // $\overline{LC}$ (Cf. figura 10).

{11} Ao traçarmos o segmento $\overline{HL}$ formamos o ΔHAM congruente ao ΔNLK, portanto com áreas iguais. Analogamente formamos o ΔHMB congruente ao ΔNLC, portanto com áreas iguais (Cf. figura 11).

{12} De {11}, devido às respectivas relações de congruências temos que $\overline{AM}$ é congruente a $\overline{NK}$, assim como $\overline{MB}$ é congruente a $\overline{NC}$, do que resulta que os trapézios retângulos *AMNC* e *MBKN* são congruentes, portanto com a mesma área.

[10] Pelo teorema de Tales, do feixe de paralelas cortadas por uma transversal.

Figura 10.

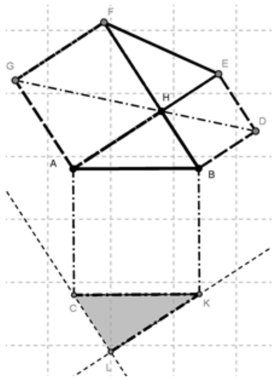
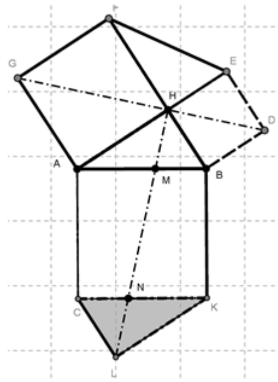


Figura 11.



{13} De {9}, {10}, {11} e {12} temos que os quadriláteros *AHLC* e *LKBH* são congruentes, portanto de áreas iguais (Cf. figura 11).

{14} Observemos os quadriláteros *HACL* e *GFED* (Cf. figura 11). $\overline{GF}$ é congruente a $\overline{AH}$, $\overline{FE}$ é congruente a $\overline{AC}$ e $\overline{ED}$ é congruente a $\overline{CL}$, pois, como vimos em {9}, ΔCLK é congruente ao ΔBHA. Consequentemente o ângulo *GFE* é congruente ao *HAC*, da mesma forma que o ângulo *DEF* é congruente ao ângulo *LCA*. Então, $\overline{GD}$ é congruente a $\overline{HL}$ o que resulta na congruência dos quadriláteros *HACL* e *GFED.*

{15} Mas, de {8} vimos que os quadriláteros *GFED* e *GABD* são congruentes e de {13} vimos que os quadriláteros *AHLC* e *LKBH* são congruentes. Logo, daqui e de {14} os hexágonos *AGFEDB* e *AHBKLC* são congruentes e, portanto têm a mesma área.

{16} Vejamos que o hexágono *AGFEDB* é formado pelos triângulos ΔEHF e ΔBHA (de mesma área) e pelos quadrados *AGFH* e *EDBH*. Da mesma forma, o hexágono *AHBKLC* é formado pelos triângulos ΔCLK e ΔBHA (de mesma área) e pelo quadrado *ABKC*. Como estes dois hexágonos, *AGFEDB* e *AHBKLC* têm a mesma área (Cf. {15}), por decomposição, podemos extrair os quatro triângulos congruentes – eliminando-os dois a dois – de cada um desses hexágonos, restando assim o que queríamos demonstrar. Que “a soma das áreas dos quadrados *BDEH* e *AGFH* é igual à área do quadrado *ABKC*.”

Mas apesar de sua genialidade e desenvoltura com a Geometria, afirma Bagni; D’Amore (2011, p. 64) que “Leonardo não parecia sentir-se à vontade com as frações.” O que pode ser comprovado no verso da folha 191, do *Código Atlântico*.

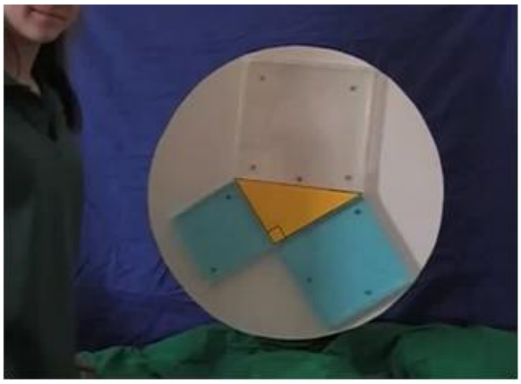
Como tais relações surgiram em sua obra? Bem, essa é outra história que futuramente contaremos àqueles que se interessam pelas intrínsecas relações entre Matemática e Arte.

Considerações finais

No que se refere à demonstração do teorema de Pitágoras pela técnica da dissecção, professores e licenciandos foram quase unânimes em afirmar que tal processo, ao aluno do ensino fundamental, ficará mais fácil pelo grau de observação e manipulação, principalmente se for implementada a possibilidade de trabalhar com moldes de EVA. Contudo, pouquíssimos dispensaram a demonstração algébrica e afirmaram que a técnica de dissecção é necessária, mas não suficiente ao aprendizado. Mas esses mesmos professores que defendem a necessidade de formalização algébrica do teorema de Pitágoras, quando apresentados ao vídeo representado na figura (12) a seguir, alegam ser esse vídeo uma prova cabal, portanto suficiente à demonstração de que *o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos*. Não podemos enunciar que o caráter dinâmico do vídeo leva à crença-afirmação de que por ser visível aos olhos tal demonstração é suficiente como demonstração do teorema em questão, pois, a proposta da dissecção foi posta com a condição de usar moldes de EVA e, portanto, a dinamicidade também se faz presente a partir da manipulação das peças.

O recurso manipulativo em curso faculta leituras que não ficam no campo da demonstração formal ou da verificação de coisas prontas, mas da observação, experimentação e, sobretudo discussão, pois para que o resultado obtido seja confiável e aceitável há de se manter a altura dos prismas envolvidos. É o caráter dinâmico (foco no processo) que possibilita a constatação, a verificação visual, mas é a intervenção (orientação sistematizada do processo) que levará à formalização e à conclusão a respeito do teorema de Pitágoras.

Figura 12. Verificação do teorema de Pitágoras por soma de volumes – “Verificação hidráulica”.



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=1er3cHAWwIM

No que se refere à técnica utilizada por Da Vinci, os participantes alegam que o uso da lousa ou de *slides* em *Power Point*, mesmo que usando a técnica do passo a passo que adotamos nesse texto, ficaria pesada; contudo, houve unanimidade em afirmar que se adotarmos moldes de EVA ou de madeira, usando a manipulação e o encaixe de peças – tal como no Tangram – a proposta além de interessante passa a ser ilustrativa e um mote a discussões interdisciplinares, permitindo que se faça um viés entre História, Artes e Matemática, por exemplo.

Da mesma forma que Lamas & Mauri (2014) propôs atividades de montagem e demonstração por (de)composição das relações métricas do triângulo retângulo, bem como a demonstração do teorema de Pitágoras, usando EVA na técnica da manipulação, sugerimos aos professores que pensem em confeccionar um material similar – usando a técnica da dissecção – que leve à demonstração do teorema de Pitágoras tal como propôs Leonardo Da Vinci. Mais do que um material lúdico, ao propor uma atividade segundo tal padrão, há de se questionar: que possíveis competências e habilidades podem vir a ser desenvolvidas pelos alunos? Que possíveis táticas e estratégias podem ser desenvolvidas com o encaminhamento de uma proposta como a supracitada? Tais ações interessam a quem? Com tais encaminhamentos estaremos rompendo a inércia do ETM ou apenas reafirmando-o? Será que estamos apenas propondo coisas novas para justificar coisas velhas ou é possível desenvolver uma ação diferencial a partir de um cenário investigativo de aprendizagem? Essas são indagações que devemos desenvolver antes de irmos com volúpia a propostas diferenciadas com o objetivo de levarmos coisas novas aos nossos alunos, pois senão ao invés de contrapormo-nos estaremos apenas reafirmando uma educação para o consumo – nem que seja o consumo de outras metodologias.

Por isso propomos que esse texto seja entendido como um desafio de usar a Matemática, como linguagem, para brincar com suas ideias e princípios, tomando referenciais da História da Matemática como alicerce; sobretudo se formos aos procedimentos adotados pelos antigos, na tentativa de identificar significados produzidos por civilizações que tomaram a Matemática como ferramenta, assim como Tales e Leonardo, para resolver suas práticas cotidianas, de ordem social, artística, cultural, religiosa, econômica etc., possibilita que se estabeleçam relações e se produzam – além da capacidade de argumentação, comparação e validação de processo – o desenvolvimento da Matemática como linguagem, tal como é enunciado nos princípios a seguir dos PCN:

> - No ensino de Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar estas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a 'falar' e a 'escrever' sobre a Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.
>
> - O ensino da Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas

> de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL, 1998, p. 56-57).

Agradecimentos

Agradecemos aos integrantes do Gepemem e a todos os professores e licenciandos do LIMAT – IFES que participaram de nossas oficinas e contribuíram com sugestões e críticas para o desenvolvimento deste trabalho. Seus saberes docentes, suas ricas experiências de sala de aula contribuíram substancialmente para o desenvolvimento desse texto.

Referências

ATALAY, Bulent. **A Matemática e a Mona Lisa – a confluência da arte com a ciência**. 2ª edição. São Paulo: Novo Tempo. 2009

BICUDO, Irineu (tradução). **Os Elementos**. São Paulo: EdUNESP, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, 1998.

CHAVES, R. **Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa**. Rio Claro. 2001. 296 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas (SP): Ed. Unicamp, 2004.

HUISMAN, Denis. **Dicionário dos filósofos**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

LAMAS, Rita de Cássia Pavani; MAURI, Juliana. **O teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**. Disponível em: <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2004/artigos/eixo10/oteoremadepitagoras.pdf>. Acesso em: 16 maio 2014.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Phitagorean Proposition**. 2. ed. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics,1968.

SANTOS, Marconi Coelho dos; SILVA, Fernando Luiz Tavares da; LINS, Abigail Fregni. **Demonstrações do teorema de Pitágoras na perspectiva do Professor de Matemática**. Encontro Nacional de Educação, Ciência e Tecnologia da UEPB. Paraíba, 2012.

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE ÁREA POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS: UMA EXPERIÊNCIA COM PARALELOGRAMOS NO PIBID/IFES

Grazzielly Mazzarim Bernades[1], Camila dos Santos de Souza[2], Carla Silva Zandonade[3]
Instituto Federal do Espírito Santo – C*ampus* Vitória

Resumo: Este artigo trata de uma atividade realizada com alunos de 1º ano do ensino médio de uma escola estadual de Vitória/ ES envolvendo Geometria que objetivou, a partir da investigação sobre paralelogramos, criar significado para o conceito de áreas, por meio da construção das figuras planas já estudadas. Foi utilizado o papel quadriculado, permitindo encontrar a área das figuras sem utilização de fórmulas. Os alunos foram instigados a identificar os padrões existentes e, somente então, após a compreensão do conceito, determinaram as fórmulas para o cálculo de área. Ao término das atividades, verificamos a importância da prática da investigação nas aulas de Matemática, não só no que diz respeito à construção do conhecimento de forma significativa, o que é notório, mas também em relação à modificação das atitudes dos alunos frente à Matemática e seu aprendizado.

Palavras-chave: geometria. área. paralelogramos. investigação. matemática.

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), no que se refere ao estudo de Geometria no ensino fundamental, evidenciam a importância desse conteúdo no desenvolvimento de "capacidades cognitivas fundamentais" pelos alunos (BRASIL, 1998, p.16). Em consonância com esse pensamento, os PCNs para o ensino médio ressaltam que as Ciências da Natureza, a Matemática e suas Tecnologias devem contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades que permitam ao educando "representar e utilizar o conhecimento geométrico para o aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade" (BRASIL, 2000, p. 96).

Além disso, diversos autores têm discutido o papel da Geometria na formação dos sujeitos. Para Passos (2005 apud CARNEIRO e DÉCHEN, 2007, p. 18), "o desenvolvimento de conceitos geométricos é fundamental para o crescimento da capacidade de aprendizagem, que representa um avanço no desenvolvimento conceitual".

Apesar disso, as publicações de alguns estudiosos como Pavanello (1993) e Pires; Curi e Campos (2000), citados por Pontes e Pontes (2011), e nossas experiências com Geometria enquanto alunas da educação básica, nos levam a crer que, ainda hoje, a Geometria é, por vezes, preterida das aulas de Matemática.

[1] Licencianda em Matemática. grazziellybernades@gmail.com
[2] Licencianda em Matemática. 2204camila@gmail.com
3 Professora da Licenciatura em Matemática e supervisora do Pibid. carlinhasz@gmail.com

Na tentativa de evitar esse acontecimento e seguindo as instruções contidas no Novo Currículo Básico da Rede Estadual do Espírito Santo, que prevê o estudo de áreas de figuras no primeiro ano do ensino médio (ESPÍRITO SANTO (Estado), 2009, p. 773), a professora supervisora da escola em que ocorrera a experiência decidiu que, uma vez por semana, suas aulas seriam dedicadas somente ao trabalho com Geometria.

Tal trabalho iniciou-se, nas turmas de primeiro ano, a partir das definições de algumas figuras, tais como: triângulo, retângulo, quadrado, paralelogramo, losango e trapézio, segundo uma dinâmica em que a professora expunha as definições e, em seguida, aplicava exercícios cujas resoluções envolviam o conteúdo estudado.

Posteriormente, houve um trabalho com ângulos. E, em semanas seguintes, a atividade sobre a qual tratamos neste relato.

A referida atividade foi elaborada com o intuito de que os alunos compreendessem o conceito de área, construindo suas reflexões a partir de questões sobre o significado deste conceito geométrico, assunto muito importante do currículo escolar e para a vida cotidiana dos estudantes. Por meio da construção das figuras planas já estudadas utilizando o papel quadriculado, seria possível encontrar a área dessas figuras sem utilização de fórmulas. A partir de então, os alunos seriam instigados a identificar os padrões existentes e, somente então, após a compreensão do conceito, determinariam as fórmulas para o cálculo de área.

O Novo Currículo, baseado em Palomar (2004), indica que "cada vez mais deve ser deixada de lado a resolução de problemas de maneira mecânica ou a memorização de processo" (ESPÍRITO SANTO (Estado), 2009, p. 127). Assim, com essa atividade, pretendíamos combater a prática de mera aplicação de fórmulas e determinação de áreas de maneira pouco significativa para os alunos.

Planejamento

A atividade consistiu em uma série de problemas envolvendo o conceito de área de figuras planas, especialmente de triângulos, trapézios e paralelogramos (retângulo, quadrado, losango e paralelogramo propriamente dito), sendo o trabalho com esses últimos o foco deste artigo.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

> O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos (BRASIL, 2002, p.129).

Nesse sentido, pretendíamos elaborar atividades de cunho investigativo, que possibilitassem aos alunos a compreensão do conceito de área. Assim, na primeira questão, seriam convidados a escrever o que entendiam por área de uma figura plana.

Para realizar as demais questões, os alunos utilizariam o papel quadriculado e considerariam cada quadradinho deste papel uma unidade de área. Desta forma, na segunda atividade, seria necessário que construíssem quatro retângulos diferentes e preenchessem a tabela a seguir:

Tabela 1. Dados referentes aos retângulos construídos pelos alunos.

Medidas dos lados	Quantidade total de quadradinhos – área

Feito isso, algumas questões seriam levantadas com o objetivo de que relacionassem as medidas dos lados de cada retângulo com sua respectiva área. Ao final, deveriam fazer uma generalização, por meio da qual escreveriam a fórmula para o cálculo da área de um retângulo qualquer.

Brum e Bisognin (2011), referenciadas em Ponte (2003), defendem que investigar "é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades." Pensando nisso, a terceira questão seria similar à segunda, tratando, no entanto, de quadrados e não mais de retângulos quaisquer.

Para a quarta questão, os alunos deveriam construir três paralelogramos distintos no papel quadriculado e recortá-los. Feito isso, seriam indagados sobre a possibilidade de se determinar com precisão a quantidade de quadradinhos que compunham cada paralelogramo. Ainda nessa questão, os alunos seriam solicitados a fazer recortes de maneira a originar retângulos a partir dos paralelogramos construídos. Cada retângulo deveria ter a mesma área do paralelogramo que o originou.

Somente após realizar todas essas tarefas, os alunos deveriam preencher a seguinte tabela:

Tabela 2. Dados referentes aos paralelogramos construídos pelos alunos, bem como aos retângulos formados a partir do recorte dos paralelogramos.

Medida da base do paralelogramo	Altura do paralelogramo	Medidas dos lados do retângulo formado	Quantidade de quadradinhos – área

E, somente então, seriam solicitados a escrever uma fórmula para o cálculo da área do paralelogramo.

Na última questão sobre paralelogramos, trataríamos do losango. Os alunos deveriam construir dois losangos iguais utilizando o papel quadriculado. Feito isso, seriam indagados sobre a possibilidade de os losangos serem transformados em figuras cuja área já soubessem determinar. Então, seriam instigados a relacionar as diagonais do losango com sua área.

Aplicação da atividade

Para iniciar a atividade, pedimos aos alunos que se organizassem em duplas, porque concordamos com os PCN+ no que se refere à importância da interação no processo de ensino-aprendizagem.

> a aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta (BRASIL, 2002, p.120).

Em ambas as turmas, identificamos resistência por parte dos alunos nesse sentido. Em alguns casos, não queriam se separar de seus colegas mais próximos e, assim, desejavam realizar a atividade em trio ou grupos maiores. Outro problema quanto a isso foi com alunos que desejavam realizar a atividade individualmente.

A priori, insistimos que era importante a realização em dupla devido as trocas que seriam estabelecidas durante a atividade. Com isso, conseguimos que muitas duplas fossem formadas por meio da fragmentação de grupos maiores. Também chegamos a indicar duplas, uma atitude que funcionou em alguns casos, no entanto, alguns alunos insistiam em desenvolver a atividade individualmente e outros em trio.

Concordamos, então, que permanecessem alguns trios e que alguns alunos realizassem a atividade individualmente, pois a maioria da turma havia formado duplas, como solicitado por nós.

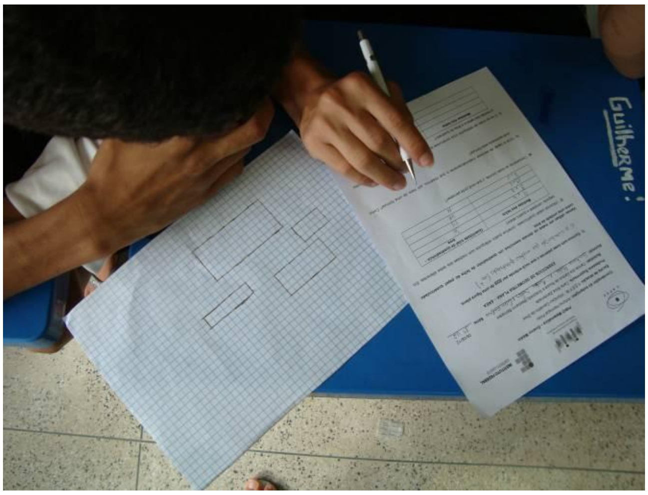
Ficamos muito contentes com a interação observada durante o desenvolvimento da atividade, pois os alunos estavam mesmo discutindo entre si sobre as questões. Além disso, os alunos que inicialmente pediram para resolverem as questões individualmente, logo se aliaram aos colegas e também realizaram a atividade em grupo.

A resolução das questões

Na primeira questão, os alunos encontraram muita dificuldade para chegar a uma resposta e demonstraram não ter o conceito de área bem formulado. Para ajudá-los a responder, procurávamos colocar em contexto, lançando mão de situações reais em que já haviam ouvido falar sobre o tema. Pretendemos futuramente retomar essa questão com eles, analisando se houve modificações em relação aos conceitos que trazem de áreas e fazendo as intervenções apropriadas.

A segunda questão foi desenvolvida mais rapidamente do que a primeira. Os alunos já conheciam a definição de retângulos. Assim, não houve problemas quanto à construção e a determinação da área, visto que cada quadradinho era considerado uma unidade de área. Assim, bastava que contassem os quadradinhos contidos em cada retângulo e preenchessem a tabela com esses dados.

Figura 1. Construção de retângulos e preenchimento da tabela.



A dificuldade observada foi no momento em que precisavam relacionar a medida dos lados de cada figura com a sua área. Então, ajudávamos os alunos fazendo questionamentos do tipo: "o que deve acontecer com a medida dos lados deste retângulo (citávamos os lados de um dos retângulos construídos por eles. 3 e 4, por exemplo) para que a área seja esta (no caso do exemplo, 12)?”. Assim, cada aluno, no seu tempo, respondia que deveria haver uma multiplicação entre as medidas dos lados.

Ainda na segunda questão, tiveram dificuldade em determinar uma fórmula para o cálculo da área, por não ter claro o que seria uma fórmula. Uma aluna até questionou: “Fórmula? Isso tem a ver com Física?”. A partir do momento em que explicamos como deveria ser construída a fórmula e em que seria útil, os alunos conseguiram responder a questão.

Alguns responderam escrevendo coisas do tipo: “A = d x y”, sendo d e y os lados do retângulo, outros “A = h x v”, sendo *h* e *v* a medida dos lados horizontal e vertical, respectivamente. Então, na correção desse exercício no quadro, com a participação de toda a turma, ratificamos o que havíamos comentado com alguns alunos em suas mesas quando dissemos que o que desenvolveram estava correto. Mas que, geralmente, encontrariam nos livros a fórmula “A = b x h” e aproveitamos para lembrá-los de isso é uma conseqüência do que haviam estudado anteriormente com a professora supervisora sobre o nome que se atribui a cada um dos lados do retângulo.

Na terceira questão, por ser bastante parecida com a segunda, não houve problemas quanto à resolução. Na correção, chamamos atenção para o fato de que no quadrado, porque seus lados possuem a mesma medida, usaríamos letras iguais para designar os lados e que, via de regra, a fórmula encontrada é: $A = l \times l$. Nenhum aluno escreveu $A = l^2$.

A figura a seguir refere-se à quarta atividade, em que os alunos, além de construir os paralelogramos no papel quadriculado, deveriam recortá-los.

Figura 2. Construção de paralelogramos.

Muitos alunos tiveram dificuldade logo no início da construção dos paralelogramos. Em muitos casos, os lados opostos não estavam paralelos. Isso ocasionaria problemas na tentativa de formação dos retângulos a partir dessas figuras. Então, sugerimos que dois lados do paralelogramo estivessem sobre as diagonais dos quadradinhos do papel quadriculado.

Quando indagados sobre a possibilidade de se determinar com precisão a área desses paralelogramos, alguns disseram que bastava juntar as metades dos quadradinhos que, obviamente, duas a duas, formariam uma unidade de área. Mas nem todos os alunos tiveram essa percepção.

Quando questionamos se era possível transformar os paralelogramos que eles construíram em retângulos, muitos alunos não viam uma maneira para isso. Entretanto, fizeram algumas tentativas utilizando a tesoura.

Uma atitude muito comum foi a de cortar um retângulo lançando mão apenas uma parte do papel utilizado na construção dos paralelogramos, isto é, tiravam os triângulos de dentro dos paralelogramos. Diante disso, utilizando os recortes deles, mostramos que a área do retângulo era menor e, portanto, diferente da área do paralelogramo, e a proposta não era essa. Então, após conversarem entre si, as duplas encontraram diferentes soluções: algumas recortaram um triângulo de uma extremidade e encaixaram em um lado do paralelogramo, formando um retângulo, de fato. Outras dividiam o paralelogramo exatamente ao meio de maneira vertical e encaixaram uma metade a outra de forma invertida, formando assim o retângulo.

Após a realização dos recortes, os alunos que não haviam conseguido dizer com precisão a área dos paralelogramos no início da atividade, perceberam que era possível.

O próximo passo era preencher a tabela com os dados tanto dos paralelogramos, quanto dos retângulos formados, conforme a *tabela 2* deste artigo. Nessa etapa, a dificuldade observada foi quanto à determinação da altura do paralelogramo.

Após preencher a tabela e observar a relação entre o retângulo e o paralelogramo, os alunos deveriam escrever uma fórmula para o cálculo da área dos paralelogramos. Então, porque haviam compreendido que um paralelogramo sempre poderá ser transformado em um retângulo, concluíram que poderiam calcular a área da mesma forma com que calculavam a área do retângulo.

Na questão em que seria necessário trabalhar com losangos, a maioria dos alunos teve dificuldade na construção desta figura. Muitos perguntavam: “Como é um losango mesmo?”. Após a construção, não tiveram dificuldade em fazer recortes de maneira a originar figuras já conhecidas.

Alguns alunos preferiram dividir o losango em 4 partes, cortando sobre as diagonais; outros fizeram um corte sobre a diagonal menor e dividiram a parte inferior ao meio. Em ambos os casos, a nova figura originada foi um retângulo. Houve, ainda, alunos que cortaram somente sobre a diagonal menor, obtendo dois triângulos, que foram encaixados posteriormente, formando assim um paralelogramo propriamente dito.

Em vista das manipulações que realizaram, não houve dificuldade em relacionar a área do losango com a área do paralelogramo. A dificuldade maior que enfrentaram foi no sentido de relacionar as diagonais com a área da figura em questão. Os alunos não sabiam dizer muito bem o que era uma diagonal, assim, aproveitamos para trabalhar esse conceito e procurávamos representar as diagonais menor e maior de forma diferente uma da outra. Assim, por meio da observação dos recortes que haviam feito e das marcas no papel indicando cada diagonal, conseguiam observar facilmente que o retângulo/ paralelogramo formado a partir do losango possuía base igual à diagonal menor. Todavia, alguns alunos respondiam que o retângulo/ paralelogramo gerado tinha altura igual à diagonal maior.

Nesses casos, movíamos as peças recortadas e formávamos a figura inicial. Então, os indagávamos a respeito da altura da figura formada a partir do recorte até que enxergassem que a altura da nova figura formada seria igual á metade da diagonal do losango. A partir de então, não tiveram problemas em determinar a área do losango.

Considerações finais

Ao término das atividades, verificamos a importância da prática da investigação nas aulas de Matemática, não só no que diz respeito à construção do conhecimento de forma significativa, o que é notório, mas também em relação à modificação das atitudes dos alunos frente à Matemática e seu aprendizado.

Trouxe-nos muita satisfação o fato de alunos que, via de regra, se envolviam pouco nas aulas de Matemática, estarem completamente envolvidos nessa atividade lendo as questões, dando sugestões para resolução, ajudando na construção das figuras, etc.. Muitos alunos afirmam que gostaram da atividade e desejam que a professora leve atividades desse tipo com maior freqüência.

Enfim, a atividade nos confirmou o que já é relatado em muitos estudos acerca do ensino da matemática, a exemplo de Braumann, que acredita que

> aprender matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles" (BRAUMANN, 2002, p. 5).

Agradecimentos

À Professora de Estágio Supervisionado III do IFES Sandra Aparecida Fraga da Silva, que em muito contribuiu para a confecção desta atividade, além de estar presente durante a aplicação da mesma.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Fundamental**: Matemática: MEC/ SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 03 ago 2012.

BRASIL, Ministério de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em 03 ago 2012.

BRASIL, Ministério de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRAUMANN, C.. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. **In:** PONTE J. P. et al. **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BRUM, M. G. N.; BISOGNIN, E.. Atividades Investigativas no Ensino de Matemática: relato de uma experiência. In: II CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CNEM, 2011, Rio Grande do Sul. **Anais.** Ijuí: 2011. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE6.pdf>. Acesso em: 13 ago 2012.

CARNEIRO, R. F.; DECHEN, T.. Tendências no Ensino de Geometria: um olhar para os anais dos Encontros Paulista de Educação Matemática. In: XVI CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL, 2007, São Paulo. **Anais**. Campinas: 2007. Disponível em: <http:// www.alb.com.br/anais16>. Acesso em: 13 ago 2012.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação. **Guia de implementação**/ Secretaria da Educação – Vitória: SEDU, 2009. (Currículo Básico Escola Estadual. Disponível em: < http://www.educacao.es.gov.br/download/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual.pdf>. Acesso em: 16 ago 2012.

PONTES, M. O.; PONTES, M. G. O.. O Uso de Quadriculados no Ensino de Geometria. In: III ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Rio Grande do Norte. **Anais.** Mossoró: 2011. Disponível em:

<http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/minicurso/doc/MC_Pontes.pdf>. Acesso em: 13 ago 2012.