

PROPRIEDADES REFLEXIVAS DAS CÔNICAS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA PARA UM CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

REFLECTIVE PROPERTIES OF CONICS: A PRACTICAL APPROACH TO AN ANALYTICAL GEOMETRY COURSE

Enéas Mendes de Jesus
Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Piúma
eneas.jesus@ifes.edu.br

Resumo: As propriedades reflexivas das cônicas são utilizadas em muitas aplicações e podem ser exploradas a fim de tornar as aulas sobre o assunto mais atrativas. O presente trabalho relata uma atividade desenvolvida durante um curso de Geometria Analítica que objetivou, inicialmente, verificar a validade de tais propriedades. Para tal, utilizou-se objetos em que se verificam tais propriedades, mas que pudessem ser manufaturados diretamente pelos alunos. A participação direta no processo de fabricação garantiu aos alunos que os objetos físicos (palpáveis) realmente tinham características dos objetos matemáticos (abstratos). Assim, a validade das propriedades verificadas na prática foi utilizada para substituir o modelo de prova matemática convencional, sem perdas na fixação do conceito. Como resultado, muitos alunos desconstruíram a ideia de que a matemática só se faz de forma teórica e em sala de aula e agora estão mais abertos às disciplinas de matemática.

Palavras-chave: Matemática. Geometria Analítica. Abordagem prática. Cônicas.

Abstract: The reflective properties of the conics are used in many applications and can be explored to make classes on the subject more attractive. The present work reports an activity developed during a course of Analytical Geometry that initially aimed to verify the validity of such properties. For this, objects that could be manufactured directly by the students where these properties are verified were used. Direct participation in the manufacturing process assured students that physical (palpable) objects actually had the characteristics of mathematical (abstract) objects. Thus, the validity of the properties verified in practice was used to replace the conventional mathematical proof model, without loss in the fixation of the concept. As a result, many students have deconstructed the idea that mathematics is only done theoretically and in the classroom and are now more receptive to math disciplines.

Keywords: Mathematics. Analytical Geometry. Practical Approach. Conics.

1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática está repleto de desafios em todos os níveis da educação. Em particular, no ensino superior, como destaca Trevisan e Tavares (2013), este ainda se encontra baseado em

modelos tradicionais de ensino, nos quais o professor apresenta os conteúdos aos estudantes e dá informações ou instruções de como resolver exercícios-tipo por meio de aulas expositivas. Como consequência, as competências desenvolvidas pelos alunos restringem-se às habilidades de reprodução e memorização, muitas desaparecendo logo após a realização das avaliações (grande parte delas de rendimento escolar).

Esta problemática está intimamente ligada às estruturas curriculares dos cursos, uma vez que os conteúdos a serem estudados são organizados, desde a ementa até ao livro texto, para apresentar o conteúdo de forma objetiva, a partir de definições, teoremas, exemplos e exercícios. Acrescente a isto a falta de tempo para que as disciplinas sejam aprofundadas e como resultado se obtém uma formação fragilizada e sem mudanças significativas (ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007).

A inserção de práticas que vão além de aulas expositivas é uma ferramenta que auxilia o professor a superar estas dificuldades no processo de ensino. Muitas discussões em torno dessas práticas são feitas no âmbito da educação matemática, como o uso de materiais (CRISOSTOMO; JANUARIO; LIMA, 2017), informática (BORBA; PENTEADO, 2001), entre outros.

Este relato apresenta uma proposta de atividade que concorda com o uso de ferramentas para o ensino da matemática (FIRMINO; SIQUEIRA, 2017). Inicialmente, discutimos as definições das cônicas sob o ponto de vista de lugar geométrico e, em seguida, suas propriedades reflexivas. Destacamos alguns pontos importantes sobre estas propriedades tão especiais inerente às cônicas, mas não intencionamos exibir resultados rigorosos sobre a sua validade utilizando-se de ferramentas elementares ou avançadas. Pelo contrário, apontaremos apenas o que for indispensável para compreensão do funcionamento das propriedades, uma vez que nosso objetivo principal é a metodologia de ensino aplicada a este tema.

Num segundo momento, descreveremos a metodologia aplicada ao ensino das cônicas numa turma de primeiro período de Engenharia de Controle e Automação, na disciplina de Geometria Analítica.

Por fim, apresentaremos o desenvolvimento da atividade, as dificuldades durante o processo e os resultados alcançados.

2 AS CÔNICAS E SUAS PROPRIEDADES

As seções cônicas, ou simplesmente cônicas, são objetos matemáticos comumente estudados em cursos de Geometria Analítica que têm aplicações nas mais diversas áreas da ciência. Sua definição, em geral, é dada a partir de dois pontos de vista: interseção de um plano com um cone e como lugar geométrico de pontos. As cônicas são divididas entre parábola, elipse e hipérbole, e iniciaremos com a definição do ponto de vista de interseção entre um cone e um plano.

Sejam duas retas e e g concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta e e façamos g girar 360° em torno de e mantendo constante o ângulo entre as retas. Nessas condições, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O . A reta g é chamada geratriz da superfície cônica, e a reta e , eixo da superfície. Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O , a cônica será:

- uma parábola, se π for paralelo a geratriz da superfície;
- uma elipse, se π não for paralelo a geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície;
- uma hipérbole, se π não é paralelo a geratriz e intercepta as duas folhas da superfície. A hipérbole deve ser vista como uma única curva, constituída de dois ramos (braços), um em cada folha da superfície.

Esta definição justifica a nomenclatura “cônica”, mas obter expressões algébricas a partir dela pode tornar-se um tanto quanto trabalhoso. Mais ainda, esta definição não leva em consideração os focos, que são elementos fundamentais no estudo das propriedades reflexivas das cônicas, e, muito

embora seja possível identificar tal elemento, do ponto de vista da definição ele não foi determinante para se obter a cônica.

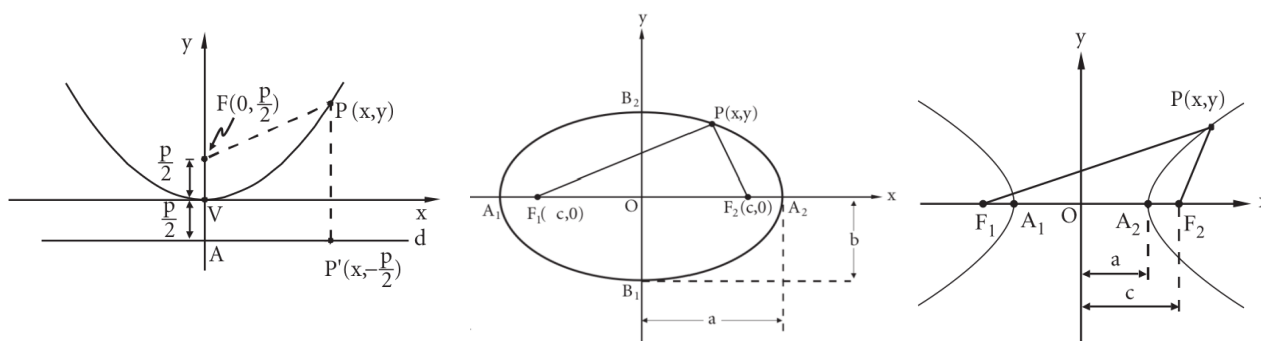
Tendo em vista a discussão do parágrafo anterior, apresentamos a seguir as definições para a parábola, para a elipse e para a hipérbole do ponto de vista de lugar geométrico, pois, a partir desta definição, é possível identificar, de maneira mais clara, os focos e outros elementos inerentes a cada cônica. Garcia (2013) apresenta uma discussão detalhada sobre a equivalência dessas definições, bem como a identificação dos elementos das cônicas quando a definição via interseção de um plano com um cone é utilizada.

A parábola é o conjunto dos pontos de um plano que são equidistantes a uma reta fixa d , chamada de *diretriz*, e um ponto fora da reta, chamado *foco*.

A elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante e essa constante é maior que a distância entre os focos.

A hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos, chamados focos, é constante e essa constante é menor que a distância entre os focos.

Figura 1 - Elementos da parábola, elipse e hipérbole



Fonte: Winterlee, 2014

Utilizando as fórmulas para distância entre pontos e entre ponto e reta, a partir de uma escolha conveniente de um sistema de eixos conforme a Figura 1, a parábola, a elipse e hipérbole podem ser representadas, respectivamente, pelas equações:

$$y = \frac{x^2}{2p}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

As cônicas são estudadas desde os tempos antigos, a propósito, a definição atual consta de um tratado de Apolônio de Perga (262-190 a.C. aproximadamente), intitulado “As Cônicas” (BOYER, 2012). Mas, sem dúvida, a maior notoriedade da aplicação de tal ferramenta é devido a Galileu (1564-1640), que em 1604 concluiu que a trajetória da bala de um canhão descreve uma parábola, bem como a Johannes Kepler e Isaac Newton, que em seus estudos descobriram que as órbitas planetárias são elípticas.

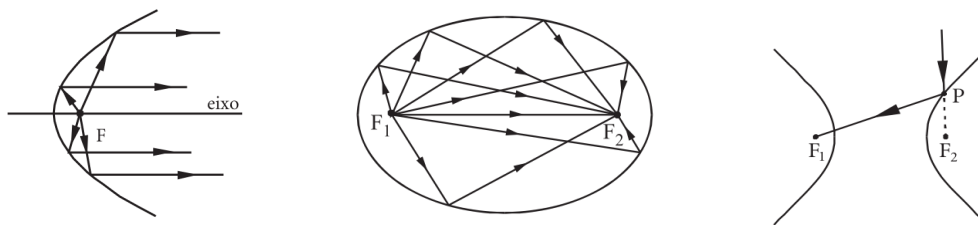
No entanto, as aplicações vão muito além de lançamento de projétil e estudo das órbitas. Estas são encontradas na construção de teatros, conchas acústicas, abóbadas, faróis e antenas parabólicas, refletores, telescópios, fornos solares, iluminação, radares, etc. Muitas dessas aplicações são devidas às propriedades reflexivas das cônicas, que apresentaremos a seguir.

2.1 Propriedades reflexivas das cônicas

A reflexão de uma reta em relação a uma curva é definida a partir do Princípio da Reflexão. Este princípio, que se aplica a raios de luz, ondas eletromagnéticas, sonoras e de calor, entre outros, estabelece que dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Tendo em mente este princípio, definimos a reflexão de uma reta (ou segmento de reta) num ponto P qualquer da curva como sendo outra reta, na qual o ângulo de incidência em relação à reta tangente que passa por P é igual ao ângulo de reflexão. A partir da definição de reflexão de uma reta em relação a uma curva, podemos enunciar as propriedades reflexivas das cônicas.

- f) Parábola - Uma reta que incide na parábola paralelamente ao eixo da parábola (ou perpendicularmente à diretriz) reflete no foco da parábola. Sob outra perspectiva, uma reta que passa pelo foco da parábola, é refletida paralelamente ao eixo da parábola;
- g) Elipse - Uma reta que passa por um dos focos, digamos foco 1, é sempre refletida no outro foco, digamos foco 2;
- h) Hipérbole - Uma reta que incide na hipérbole na direção de um dos focos, digamos o foco 1, é sempre refletida no outro foco.

Figura 5 - Propriedades reflexivas das cônicas



Fonte: Winterlee, 2014

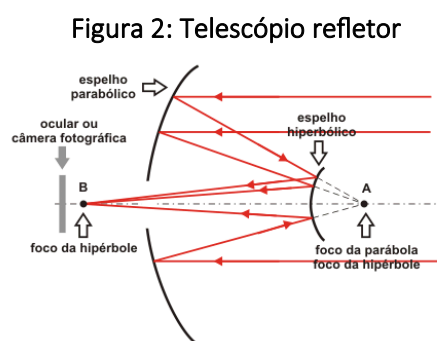
Muito embora o presente relato esteja fundamentado nas propriedades reflexivas das cônicas, omitiremos a demonstração de tais propriedades, haja vista que o foco principal do texto é relatar a experiência desenvolvida. Souza (2014) discorre sobre tema e apresenta de forma satisfatória as provas para estas propriedades.

3 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

As propriedades reflexivas das cônicas têm aplicações que são bastante exploradas fora do ambiente acadêmico matemático, como é o caso da antena parabólica, que já traz no nome a identificação com a parábola. Trata-se, na verdade, de uma superfície chamada de parabolóide, mas que mantém as mesmas propriedades reflexivas da parábola. Considerando que os sinais chegam à antena paralelos ao eixo da parábola, estes são refletidos para o foco, em que é colocado um receptor de sinal. Dessa forma, os raios ficam concentrados em um único ponto, amplificando assim o sinal recebido.

Em relação à elipse, uma aplicação dessa propriedade pode ser verificada nos refletores odontológicos. Como o objetivo desses aparelhos é concentrar o máximo de luz em um ponto específico sem que essa luz cause desconforto para o paciente, coloca-se uma fonte de luz em um dos focos da elipse (elipsoide, para ser mais preciso) de modo que, ao refletir na superfície elíptica espelha, os raios de luz são refletidos para o outro foco, que fica localizado onde se pretende maior iluminação.

Se tratando da hipérbole, as aplicações não são tão imediatas quanto as duas já relatadas. Uma aplicação para a propriedade reflexiva da hipérbole pode ser verificada nos telescópios refletores, que, muito embora não façam parte do cotidiano de muitos alunos, são de conhecimento de todos. Os telescópios refletores são compostos por um espelho parabólico que reflete a imagem do objeto no foco da parábola, no entanto, o foco da parábola fica no interior do telescópio. Para refletir a imagem para um ponto fora do telescópio, utiliza-se um espelho hiperbólico entre o espelho parabólico e o foco, de modo que um dos focos do espelho hiperbólico coincida com o foco do espelho parabólico. A Figura 3 ilustra o esquema de um telescópio que acabamos de descrever.



Fonte: Alfaconction, 2019

Há outras aplicações cujo funcionamento não comentaremos, como é o caso dos faróis de automóveis, do fogão solar ou simplesmente de uma sinuca elíptica a qual, embora não tão popular, é desenvolvida a partir de tais propriedades. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos

tendo em vista essas aplicações. A seguir, apontaremos duas referências que versam sobre o assunto e, mais ainda, elencam outras boas referências, o que auxiliará numa reprodução desta atividade (SOUZA, 2014; JÚNIOR, 2015).

Diante de tantas aplicações que fazem parte do cotidiano, foi elaborada uma atividade que objetivou estimular o aluno a verificar a validade de tais propriedades na prática, fixando o conteúdo dado de forma teórica. Mais ainda, com a atividade, os alunos puderam responder a uma pergunta que é comum nas aulas de matemática, a saber: “Para que serve isso?”.

A experiência relatada foi desenvolvida em uma turma de primeiro período do curso de Engenharia de Controle e Automação, durante a disciplina de Geometria Analítica. Mais precisamente, trata-se de uma turma do turno noturno composta por, aproximadamente, 26 alunos (ao longo do curso houve desistências, daí a imprecisão), em que alguns desses eram recém formados no Ensino Médio enquanto outros já não estudavam há um certo tempo.

A primeira etapa do projeto consistiu em apresentar aos alunos os objetos matemáticos que os mesmos pesquisariam. Para tal, foram apresentadas em sala de aula, pelo professor, as definições das cônicas e suas propriedades reflexivas, bem como algumas aplicações para que os alunos pudessem ter um ponto de partida para a pesquisa.

Num segundo momento, foi feita a divisão dos grupos. Tendo em vista a quantidade de alunos e a complexidade do projeto, aproveitou-se a quantidade das cônicas para determinar a quantidade dos grupos, ou seja, foram criados três grupos, de modo que cada grupo seria responsável por elaborar um projeto para uma cônica. Tendo dividido os grupos, os alunos se organizaram entre si e iniciaram um trabalho de pesquisa sobre as possibilidades de aplicações. Não simplesmente aplicações gerais, mas aplicações que pudessem ser reproduzidas por eles próprios envolvendo materiais e tecnologias acessíveis, de modo que eles participassem ativamente do processo de forma autônoma.

A pesquisa das possibilidades de aplicações para as propriedades reflexivas das cônicas foi parte fundamental na atividade, pois, dessa forma, o aluno acessou várias aplicações para depois escolher uma para se aprofundar. Como resultado imediato, temos a mudança de percepção do aluno quanto à aplicabilidade do tema, pois, muito embora ele não se aprofunde em todas as aplicações, pelo menos de forma superficial, ele acaba tendo conhecimento da existência delas. Mais ainda, de forma indireta, ele encontra aplicações para outros conteúdos matemáticos, uma vez que o principal mecanismo de pesquisa utilizado por eles, a saber, os sítios de busca, apresentam resultados opcionais tendo em vista as palavras pesquisadas, neste caso, “aplicação” e “matemática” juntas na mesma pesquisa.

A partir do levantamento das possibilidades de aplicações, fez-se necessário um acompanhamento do professor para evitar que a aplicação escolhida exigisse um investimento financeiro alto, ou mesmo muito tempo do grupo. Caso o grupo escolhesse uma aplicação nestes termos, isso poderia ocasionar uma desistência do projeto por parte de alguns integrantes que não pudesse “colaborar” de forma satisfatória, ou mesmo de todo o grupo. E isso, haja vista que alguns alunos trabalhavam e só poderiam se dedicar ao projeto em momentos específicos e outros não dispunham de valores a serem investidos.

Tendo definido a aplicação, iniciou-se o processo de produção da ferramenta na qual se verificaria tais propriedades. Assim, o grupo responsável pela parábola escolheu o “refletor parabólico”; o grupo responsável pela elipse escolheu a “sinuca elíptica”; e o grupo responsável pela hipérbole escolheu a “mesa hiperbólica”. Mesmo com o acompanhamento do professor, o último grupo acabou desistindo nas primeiras semanas do projeto. Em contrapartida, o grupo responsável pela elipse desenvolveu um projeto a mais, a saber, a “mesa parabólica”. Discorreremos sobre detalhes dos projetos na seção de resultados.

Durante todo o processo, foi indispensável o acompanhamento do professor mais de perto, para garantir que a ferramenta produzida realmente possuía as características matemáticas da cônica em questão, para que a validade da propriedade na ferramenta produzida fosse transferida para o

objeto matemático. Mais ainda, para evitar que, em caso de falha por descuido na produção, não houvesse dúvidas da validade da propriedade para o objeto matemático. Essa garantia estava condicionada a cada projeto, conforme veremos nos resultados.

A avaliação ocorreu durante todo o projeto, uma vez que o professor era acessado constantemente para orientar os alunos quanto às dificuldades surgidas. Utilizou-se registros no diário de bordo e fotográfico para auxiliar na demarcação dos estágios e, conseqüentemente, perceber a evolução ao longo do desenvolvimento dos projetos (TRIVIÑOS, 1987; LUDKE; ANDRÉ, 1986).

Foi gerado um relatório com detalhes do projeto, tais como: o material utilizado, a metodologia empregada, a divisão de tarefas e outras particularidades que estão associadas à escolha da aplicação. Por fim, o projeto foi compartilhado com a turma, para que os demais alunos tivessem acesso a tal aplicação e, com isso, entendessem melhor o funcionamento da propriedade reflexiva da cônica utilizada no projeto.

4 RESULTADOS

Os resultados obtidos podem ser vistos pelo menos sob dois pontos de vista. O primeiro diz respeito ao aspecto qualitativo, sendo que a apresentação deste resultado dá-se de maneira subjetiva, haja vista que é fruto de uma percepção do aluno durante o desenvolvimento da atividade. Estes resultados nem sempre são capturados em um produto final (que está relacionado com o segundo ponto de vista), uma apresentação, relatórios ou outros mecanismos avaliativos. Na verdade, para alguns alunos estes resultados só vêm à tona, ou seja, eles percebem a importância da atividade, quando estão diante de outros problemas cujas soluções passam por conceitos aprendidos durante a atividade.

Ainda sobre este primeiro ponto de vista, muitas intervenções foram feitas pelo professor com o objetivo de extrair dos alunos suas percepções sobre o desenvolvimento antes, durante e após o término do projeto. Muito embora estas entrevistas não compunham a avaliação, os alunos

responderam positivamente às provocações. Por se tratar de um curso de engenharia, percebeu-se, a partir dos relatos, que atividades como estas eram um anseio dos alunos, não só nas disciplinas de Matemática, mas em todas, haja vista as atribuições do profissional.

O segundo ponto de vista diz respeito ao produto final desenvolvido, mais precisamente, ao objeto confeccionado, no qual se verificaria as propriedades reflexivas das cônicas. Como o resultado sob este ponto de vista é algo palpável, os parâmetros utilizados na avaliação são mais concretos. O objetivo da atividade, que era verificar as propriedades reflexivas das cônicas, serviu de baliza para tais parâmetros. Dessa forma, o professor verificou se o objeto confeccionado era de fato a cônica e, em seguida, a partir de experimentação, verificou as propriedades reflexivas. Os resultados sob o segundo ponto de vista são apresentados a seguir.

Projeto 1: Refletor parabólico

O refletor parabólico consiste em uma superfície parabólica espelhada (Figura 3) na qual, quando uma fonte de luz incide sobre a superfície, os raios de luz são refletidos no foco da parábola. O grupo responsável por este projeto aderiu a ideia a partir de vídeos oriundos da internet. O material utilizado no projeto foi uma antena parabólica, 8 metros de fita espelhada e cola quente. Como a antena parabólica não foi manufaturada pelos alunos, eles buscaram entender o funcionamento das mesmas e até o processo de fabricação para garantir que não se tratava apenas do nome, mas que a superfície de fato possuía as propriedades da parábola.

Figura 6 - Antena parabólica revestida com fita espelhada



Fonte: Acervo do Autor

Para execução do projeto, os alunos fixaram a fita espelhada na antena utilizando a cola quente; após a fixação da fita, o refletor foi exposto ao sol para a verificação da propriedade. Como a aula era noturna, os alunos gravaram um vídeo e disponibilizaram, inicialmente, ao professor e, em seguida, para a turma durante a apresentação. Como a colagem da fita espelhada foi feita de forma manual, verificou-se que certos pontos ficaram mais elevados, o que resultou em uma perda na precisão da reflexão, gerando um foco maior do que o esperado. Entretanto, esta pequena imprecisão não foi suficiente para invalidar o projeto.

Projeto 2: Mesa parabólica

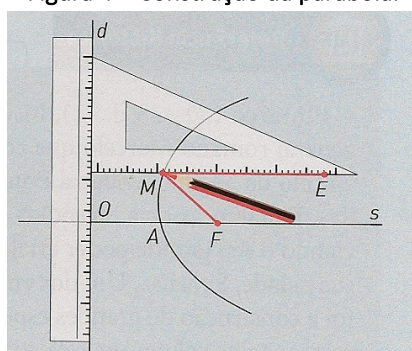
A mesa parabólica nada mais é do que uma mesa na qual um dos lados é uma parábola (Figura 5). Este projeto foi elaborado sem uso de material previamente fabricado, como foi o caso do projeto 1 que utilizou uma antena parabólica. Neste caso, o principal material utilizado foi madeira, que foi manipulada pelos próprios alunos. Além disso, foi utilizado um tecido para melhorar a aderência do objeto que seria lançado durante a verificação da propriedade e canaletas para garantir que o lançamento incidisse na parábola perpendicularmente à reta diretriz.

As principais dificuldades para a execução deste projeto resultaram da manipulação da madeira. Em primeiro lugar, necessitava-se de um ambiente apropriado e ferramentas específicas para esta manipulação, o que inviabilizava qualquer ação durante o período de aula. Em segundo lugar, a precisão do corte em formato parabólico deveria ser assegurada, ou seja, não bastava apenas fazer um corte curvo, pois havendo qualquer irregularidade no corte este não representaria uma parábola, o que colocaria em risco todo o projeto.

Para construção da parábola utilizou-se uma técnica de construção geométrica, conforme destaca Lenz (2014, p. 43). Para a aplicação desta técnica, necessita-se de um prego, uma régua, um esquadro em formato de um triângulo retângulo, um barbante do tamanho de um dos catetos do esquadro e um lápis (ou similar). Descrevemos, a seguir, o passo a passo para a construção:

1. fixe o prego na madeira onde será desenhada a parábola. O ponto onde o prego for fixado será o foco da parábola;
2. fixe a régua abaixo do foco. Esta será a diretriz da parábola;
3. fixe uma ponta do barbante na ponta do esquadro e a outra no prego;
4. utilize o lápis para traçar a parábola. Para tal, o lápis deve estar rente ao esquadro e o barbante esticado, conforme a Figura 4. Ao deslizar o esquadro sobre a régua obtém-se a parábola.

Figura 4 – Construção da parábola.



Fonte: Aprendematemática (2019)

A verificação de que a curva resultante é de fato uma parábola é imediata e utilizaremos os dados da Figura 4 para melhor compreensão. Como o barbante tem o mesmo tamanho do cateto

perpendicular à régua, a distância da ponta do lápis (ponto M) ao prego (ponto F) é igual à distância do ponto M à régua, independente da posição do ponto M. Ou seja, a curva desenhada é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de um ponto (o prego) a uma reta (neste caso, a régua). Esta é exatamente a definição de parábola do ponto de vista de lugar geométrico.

Tendo superado esses desafios, os componentes do grupo confeccionaram a mesa parabólica, cujo resultado final está apresentado na Figura 5.

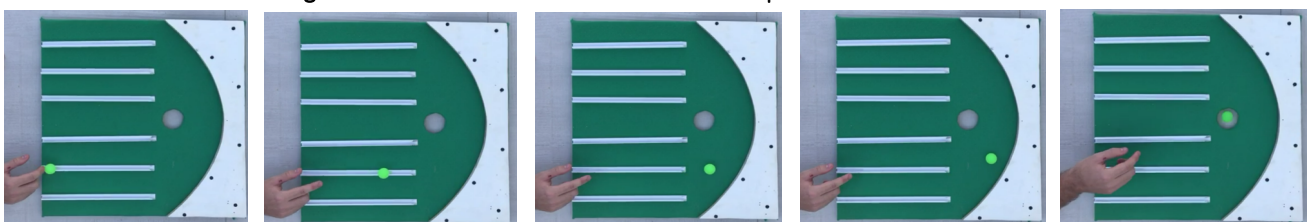
Figura 5 - Mesa parabólica



Fonte: Acervo do autor

Por fim, em data previamente estabelecida pelo professor, os alunos fizeram uma apresentação do projeto para o restante da turma. Nesta apresentação constavam informações como as já descritas no texto: material utilizado, metodologia, entre outras. Os alunos, além de disponibilizarem a mesa para os colegas testarem o funcionamento, também produziram um vídeo, do qual foram tirados alguns *prints*, que estão exibidos na Figura 6.

Figura 6 - Prints extraídos de um vídeo do dispositivo sendo testado

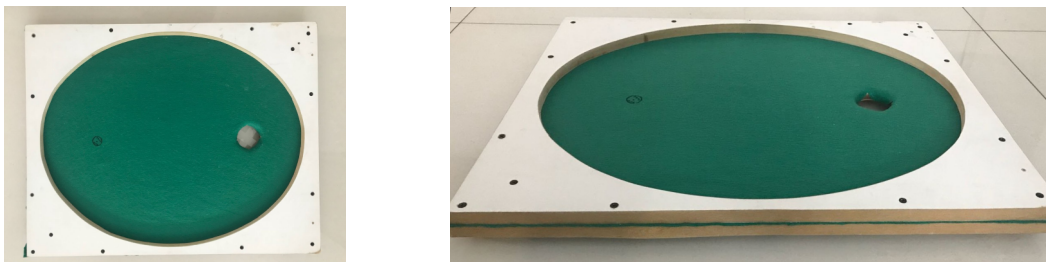


Fonte: Acervo do autor

Projeto 3: Sinuca elíptica

Uma sinuca elíptica difere da sinuca convencional em alguns aspectos: possui apenas uma “caçapa”, enquanto a convencional possui seis, e a borda possui o formato de uma elipse (a convencional é retangular). No que diz respeito ao objetivo do jogo, este é o mesmo: encaçapar as bolas. A propriedade reflexiva da elipse entra em cena quando se utiliza a “tabela” (a borda da mesa), pois se tratando de uma borda elíptica, a partir da propriedade reflexiva, para se obter sucesso nas jogadas, a bola a ser encaçapada utilizando a tabela deve passar por um dos focos da elipse para então “refletir” no outro (a caçapa).

Figura 7 – Sinuca Elíptica



Fonte: Acervo do autor

No que diz respeito à construção da borda em formato elíptico, este é mais simples: basta fixar dois pregos na madeira (estes serão os focos) e, com um barbante preso aos pregos, desenhar a curva de modo que o barbante fique sempre esticado. Como esta técnica é bem difundida, limitaremos os comentários sobre a mesma. O leitor que desconheça tal técnica, pode encontrá-la em Lenz (2014, p. 22).

Projeto 4: Mesa hiperbólica

Como o grupo responsável pelo projeto envolvendo a hipérbole não concluiu o projeto, este não será visto como resultado. Ou seja, não há relatórios sobre o material utilizado, quais foram as

principais dificuldades encontradas pelos alunos na realização do projeto, quais as metodologias empregadas para superar estas dificuldades e muito menos relatos escritos, orais ou fotográficos.

Esclarecemos que os motivos da desistência nada tiveram a ver com as particularidades do projeto, e sim por motivos pessoais do grupo que não conseguiu se organizar entre si. Mesmo com a intervenção por parte do professor, inclusive indicando uma possibilidade de aplicação, os integrantes preferiram realizar uma atividade de recuperação em detrimento à atividade sugerida.

No entanto, tendo em mente que o presente texto não busca apenas relatar uma experiência, mas fazer apontamentos metodológicos para que a atividade descrita possa ser replicada, segue um breve comentário sobre o projeto inicial envolvendo a mesa hiperbólica. Essencialmente, este projeto deveria ser desenvolvido nos mesmos termos dos projetos 2 e 3, simplesmente substituindo a cônica. A mesa seria confeccionada com um braço da hipérbole e o foco que está fora deste braço. Dessa forma, quando o objeto incidir no braço da hipérbole na direção do foco interior a este braço, ele refletirá na direção do foco que está fora do braço (a caçapa, em uma associação com os projetos 2 e 3). Outra possibilidade é revestir o braço da hipérbole com um material reflexivo e utilizar um laser para verificar a propriedade.

5 CONCLUSÃO

É sabido que a matemática está presente nas mais variadas áreas; no entanto, nem sempre é imediata a identificação de sua atuação. Muitas vezes o conteúdo estudado em sala de aula é apenas uma ferramenta utilizada de uma forma intermediária que não necessariamente aparece na aplicação final. Como é o caso de vetores no plano e no espaço, que é objeto de estudo da Geometria Analítica mas que tem a sua aplicação mais imediata em grandezas físicas vetoriais (força, velocidade, aceleração, etc). Este cenário representa um desafio na apresentação de muitos conteúdos da matemática uma vez que, como o aluno não tem acesso a uma aplicação imediata, este sente-se desmotivado.

Propor atividades práticas de aplicação imediata é um recurso que auxilia na superação do desafio de manter o aluno sempre estimulado. A atividade em questão, descrita neste relato, despertou nos alunos o interesse em pesquisar e obter maiores informações sobre o funcionamento de objetos que fazem parte do cotidiano, como é o caso da antena parabólica. Eis uma curiosidade sobre o projeto que abordou as propriedades reflexivas da parábola: durante a pesquisa sobre o tema, os alunos “descobriram” um prédio projetado com uma fachada em formato parabólico que causou transtorno refletindo os raios solares em alta temperatura em alguns pontos em frente ao prédio (ISTOE, 2019). Os alunos identificaram a propriedade reflexiva da parábola neste episódio e perceberam a importância de se ter domínio das ferramentas utilizadas.

A atividade realizada ratificou aos alunos que a matemática está presente, de maneira relevante, no cotidiano e que sua aparição é verificada em situações e objetos que vão além de operações numéricas básicas ou formas geométricas. Muito embora a atividade tenha sido aplicada em uma disciplina específica, foi possível notar, por meio de relatos informais da maioria dos alunos, que estes se tornaram mais acessíveis a outras disciplinas de matemática, impactando de maneira direta o processo de formação.

6 REFERÊNCIAS

ALFACONNECTION, 2019. **Espelhos parabólicos, elípticos e hiperbólicos**. Disponível em: <<https://www.alfaconnection.pro.br/fisica/luz/espelhos/espelhos-parabolicos-elipticos-e-hiperbolicos/>>. Acesso em: 23 de Abril de 2019.

ALMEIDA, L.M.W., FATORI, L.H., SOUZA, L.G.S. **Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática**. RCT. v. 10, n. 16, 2007.

APRENDEMATEMATICA. **Parábola**. Disponível em: <<http://www.aprendematematica.com/parabola/>>. Acesso em: 23 de Abril de 2019

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3 ed. São Paulo. Editora Blücher, 2012.

CRISOSTOMO, E.; JANUARIO, G.; LIMA, K. *Relação professor-materiais curriculares em Educação Matemática: análise de alguns resultados de pesquisas. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 53, p. 62-74, jan./mar. 2017.*

FIRMINO, G. L.; SIQUEIRA, A.M. O. *A matemática no ensino de engenharia. The Journal of Engineering and Exact Sciences - JCEC, v. 03, n. 03, p. 331-345, 2017.*

GARCIA, J. C. **Explorando as definições de cônicas.** 2013. 69 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

ISTOE. **Arquitetura Incediária.** Disponível em:<https://istoe.com.br/323011_ARQUITETURA+INCENDIARIA/>. Acesso em: 15 de Março de 2019.

JÚNIOR, M. C. A. **Seções Cônicas:** propostas de atividades com ênfase nas propriedades refletoras e aplicações. 2015. 74 f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

LENZ, M. **O estudo das Cônicas a partir da Construção Geométrica.** 2014. 49 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A.; **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo, E. P. U., 1986.

SOUZA, L. D. **Cônicas e suas propriedades notáveis.** 2014. 64 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2014.

TREVISAN, A.; TAVARES, M. M. **Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo.** Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. 6. 10.3895/S1982-873X2013000100008, 2013.

TRIVIÑOS, A. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica.** 2 ed. São Paulo. Editora Pearson, 2014.