

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE VOLUME DE PIRÂMIDES POR MEIO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

THE CONSTRUCTION OF THE PYRAMID VOLUME CONCEPT THROUGH MANIPULATIVE MATERIALS

LALESCA PAULA DE OLIVEIRA RODRIGUES
LALESCA-OLIVEIRA@HOTMAIL.COM

Resumo: Este estudo apresenta um relato de experiência sobre uma atividade desenvolvida numa turma de 3ª série do ensino médio, cujo objetivo foi analisar as contribuições que uma atividade de experimentação sobre volume de pirâmides provocaria na aprendizagem dos alunos. Para tal, os estudantes, em grupos, confeccionaram pirâmides com bases poligonais diferentes, encheram-nas com areia e posteriormente compararam as quantidades com os outros grupos. Todo o processo desenvolvido ao longo da aula mostrou-se motivador para a aprendizagem e propiciou a troca de informações e construção do conhecimento. A análise dos resultados foi realizada por meio da observação das aulas, das resoluções das atividades, da interação entre os grupos e registros fotográficos. Foi possível constatar que a manipulação dos materiais e descobertas realizadas tornaram o ambiente de ensino atrativo, garantindo a participação ativa dos alunos e possibilitando que, de forma experimental, os estudantes assimilassem o cálculo do volume de pirâmides.

Palavras-chave: Materiais Manipulativos. Volume de Pirâmides. Ensino Médio.

Abstract: This study presents an experience report about an activity developed in a 3rd grade high school class, whose objective was to analyze the contributions that an experimental activity on the volume of pyramids would provoke in student learning. To this end, the students, in groups, made pyramids with different polygonal bases, filled it with sand and later compared the quantities with the other groups. The whole process developed throughout the class was motivating for learning and provided the exchange of information and knowledge construction. The analysis of the results was done through the observation of the classes, the resolutions of the activities, interaction between the groups and photographic records. It is possible to verify that the manipulation of the materials and discoveries made the teaching environment attractive, guaranteeing the active participation of the students and enabling that in an experimental way the students could assimilate the calculation of the volume of pyramids.

Keywords: Manipulative Materials. Volume of Pyramids. High school.

1 INTRODUÇÃO

A geometria é vista, por muitos alunos, como algo desinteressante dentro da matemática. Embora ela possa ser vivenciada no cotidiano por meio de formas geométricas tridimensionais, cálculos corriqueiros de área e volume, observa-se certa dificuldade dos alunos assimilarem os conceitos.

No ensino de geometria espacial, a limitação ao livro didático precisa ser superada, pois o aluno muitas vezes não é capaz de, sozinho, fazer a leitura de figuras em três dimensões e analisar todas as características nela presente. Dessa forma, é indicado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 76) que o trabalho com comprimentos, áreas e volumes seja desenvolvido de forma que o aluno “consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento de fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação [...]”. Isso indica a necessidade do professor buscar metodologias que possam proporcionar um ensino significativo⁸ para o estudante e que o mesmo possa constatar que a matemática é, de fato, importante no seu cotidiano. Nesse sentido, o uso de materiais manipulativos com uma abordagem experimental pode ser visto como estratégia para facilitar a aprendizagem e relacionar a teoria com a prática.

Sarmiento (2010) aborda que os materiais manipulativos possibilitam contornar os transtornos comuns no ensino de geometria, pois permitem a contextualização dos conteúdos matemáticos e sua associação a situações mais concretas. Assim, por meio dos experimentos o aluno poderá formular hipóteses com maior facilidade e identificar a construção das fórmulas e seus significados, impulsionando a assimilação dos conteúdos. Gervázio (2017, p. 45) também aborda que:

Mesclar o experimental com o abstrato na didática da sala de aula, pode promover uma aprendizagem mais eficaz, pois estimula o cálculo mental, a dedução de estratégias, o domínio das operações fundamentais, a construção de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio lógico. E estes são os pontos cruciais para a efetivação do verdadeiro conhecimento matemático.

Percebe-se, então, que o ensino de geometria pode ser aprimorado, e a matemática experimental pode alcançar, com maior agilidade, um dos objetivos da disciplina, apresentado no Currículo

⁸ Entende-se como ensino significativo aquele capaz de mostrar o sentido em aprender o conteúdo.

Básico da Escola Estadual (ESPÍRITO SANTO, 2009, p .110 – 111), que é: “possibilitar situações que levem o estudante a validar estratégias e resultados, de forma que possam desenvolver o raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizarem conceitos e procedimentos matemáticos [...]”. Nesse sentido esse estudo, que fez parte de uma atividade acadêmica curricular da disciplina de geometria espacial do curso de especialização *latu sensu* “Ensino de Matemática para o Ensino Médio: Matemática na Prática”, ofertada pela Universidade Federal do Espírito Santo, por intermédio da Educação Aberta e a Distância, objetivou analisar as contribuições que uma atividade de experimentação sobre o conteúdo “Volume de pirâmides” provocaria na aprendizagem dos alunos de uma turma de terceira série do Ensino Médio regular.

Assim, nos capítulos seguintes serão apresentadas as discussões teóricas sobre os materiais manipulativos; em seguida serão abordados os processos de desenvolvimento da aula por meio da metodologia utilizada para tal; por fim, apresentam-se os resultados e discussões que detalham a aula e o comportamento dos alunos no decorrer da atividade.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Por muito tempo, o ensino de matemática foi conduzido de forma mecanizada, sem possibilidades de o estudante construir seu conhecimento. Dessa forma, o aluno apenas deveria seguir os comandos dados pelo professor, sem questionamentos. Com o passar dos anos, foi sendo identificada a necessidade de mudanças nas práticas de ensino, de forma a desenvolver no aluno as capacidades necessárias para que o mesmo pudesse agir com maior participação nas tomadas de decisões da sociedade.

Nesse sentido, pesquisas sobre o ensino de matemática passaram a ser desenvolvidas e outros recursos e metodologias, diferentes da tradicional, começaram a ser resultado de práticas mais eficientes para a aprendizagem dos alunos.

Como recurso de ensino, os materiais manipulativos são abordados por Camacho (2012, p. 23) como objetos dinâmicos que permitem ao aluno o contato direto com o conteúdo e fazem com que ele se entregue “[...] intuitivamente ao processo de descoberta, adquirindo destrezas na interiorização, estruturação e compreensão de conceitos”, estimulando “[...] o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, pois através da sua manipulação, exploração e investigação o aluno aprende a comunicar, a raciocinar e a desenvolver problemas de forma natural e clara” (CAMACHO, 2012, p. 23).

Gervázio (2017, p. 46) também destaca que: “[...] ter como ferramenta os materiais manipulativos nas aulas é essencial para um melhor aprendizado, para a interação entre os alunos e um estímulo para o trabalho em equipe. O que pode ser primordial para o desenvolvimento do senso crítico e dedutivo do estudante com a matemática.” Assim, percebe-se que o ensino da matemática conduzido por atividades que atraem e convidam os alunos a fazer experimentações configura um novo ambiente escolar, capaz de desenvolver o raciocínio lógico e as interações em grupo.

Em se tratando da utilização de materiais manipulativos no ensino de geometria espacial, Giostri e Silva (2014, p. 51) abordam que o trabalho com a visualização do espaço tridimensional na sala de aula pode “[...] trazer ao aluno a oportunidade de usarem muitas das relações espaciais e de construir diferentes conceitos matemáticos.” Pois é desafiador ao estudante transitar dos estudos de figuras bidimensionais para as tridimensionais, e a aprendizagem pode ser facilitada quando são levados materiais nos quais eles possam visualizar os sólidos geométricos, tocar e assimilar o conteúdo abordado (MONTEIRO, 2013).

Dessa forma, percebe-se que o uso dos materiais manipulativos no ensino de geometria espacial é um recurso que contribui para o entendimento do conteúdo pelo aluno e, também, sua instigação à formulação de hipóteses e saberes.

3 DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada no bairro Feu Rosa, no município da Serra – ES. Na ocasião da pesquisa estiveram presentes 29 estudantes e foram utilizadas duas aulas de 55 minutos cada.

A atividade foi adaptada do site da Unicamp⁹ “Matemática Multimídia – recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio”, cujo experimento tem por título “Volume de pirâmides” e foi elaborado pelas autoras Rodrigues e Costa (2010). A seguir é apresentada uma tabela contendo o roteiro metodológico utilizado:

Tabela 1 – roteiro metodológico.

Etapa	Descrição
1ª	Construção de pirâmides.
2ª	Preenchimento das pirâmides com areia.
3ª	Comparação dos volumes obtidos.
4ª	Resultados observados e respostas às questões propostas.
5ª	Formalização do cálculo.

Fonte: Produção da autora, 2019.

No primeiro momento, os alunos foram divididos em grupos e foi-lhes entregue uma folha contendo as instruções de como deveriam construir as pirâmides, conforme apresentado abaixo:

- a) recortar a base de papelão;

⁹ RODRIGUES, Claudina Izepe; COSTA, Sueli I. R. **Volume de Pirâmides**. 2010. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039>>. Acesso em: 03 jul. 2018.

- b) perfurar o papelão num local qualquer da base e nele fixar o canudo com a fita adesiva de modo que este fique ortogonal à base;
- c) planificar a pirâmide no papel cartão, marcando os pontos que correspondem aos vértices;
- d) ligar todos os pontos marcados na folha e desenhar uma aba para facilitar a montagem;
- e) montar a pirâmide a partir da planificação.

Também foi entregue, a cada grupo, um canudo de 7 centímetros e um modelo de polígono – triângulo, quadrado ou hexágono - que serviriam de base para as pirâmides. No segundo momento, cada grupo deveria preencher a sua pirâmide com areia e despejá-la num copo descartável, marcando com um pincel o nível atingido. No momento seguinte deveriam comparar sua marcação com os outros grupos. Ao término desta etapa, os alunos deveriam responder a algumas questões que se encontravam na folha de instrução de montagem das pirâmides, dentre elas: Quais das pirâmides tem o maior volume? O que podemos concluir desse fato? Qual das pirâmides tem maior área da base?

Para enriquecer a aula, no quinto momento foi apresentado um prisma de base triangular feito com espuma floral e, por meio de dois cortes, foram obtidas três pirâmides. Nesta fase, os alunos puderam perceber que elas tinham o mesmo volume e que, desta forma, uma pirâmide é igual a um terço do volume do prisma triangular, sendo possível então formalizar com eles a fórmula do volume de uma pirâmide qualquer.

Os materiais necessários para o desenvolvimento da aula foram: papel cartão, papelão, polígonos (retângulo, triângulo e hexágono), tesoura, régua, canudo, fita adesiva, copo descartável, areia, pincel e folha de instruções. A avaliação da atividade foi realizada pelo recolhimento das respostas às questões apresentadas aos alunos, observação da aula e fotos registradas.

4 REFLEXÕES SOBRE A PRÁTICA

Ao visualizarem os materiais que seriam utilizados na aula de matemática, os alunos já se mostraram muito empolgados. Exposta a proposta da atividade, foi solicitado que os alunos

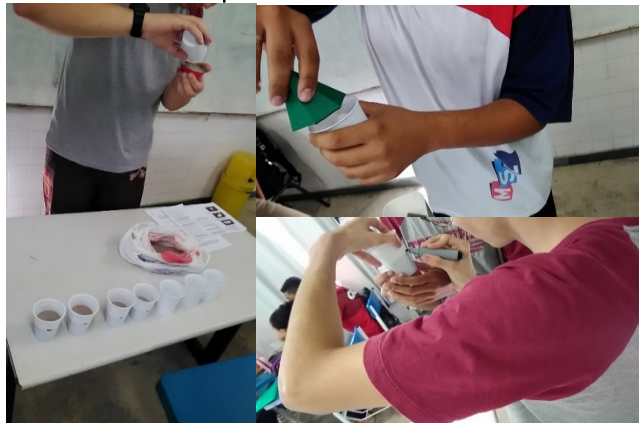
formassem grupos, totalizando 6 grupos com 4 integrantes e um grupo com cinco. A cada grupo foi entregue um polígono, um pedaço de papelão, um pedaço de papel cartão, o canudo, a fita adesiva e a folha de instruções. Os copos e a areia ficaram em cima da mesa da professora para que os alunos pudessem, ao encher seus copos, fazer as marcações do nível atingido e comparar com os copos dos colegas.

Apenas um dos grupos que recebeu o polígono hexagonal teve dificuldades em planificar e montar a pirâmide, gastando-se um tempo maior para concluir a construção. A dificuldade que apresentaram foi: após marcar o vértice mais alto da pirâmide (altura do canudo) e girá-lo para marcar os vértices do polígono, ou eles não se atentavam ao número de lados do polígono ou marcavam o ponto muito distante, sem manter o canudo em seu vértice, resultando na planificação errada da pirâmide. A tentativa de planificação foi realizada pelo grupo por três vezes. As duas primeiras tentativas foram feitas a partir das análises e discussões entre eles, e na última tentativa foi solicitada a ajuda da professora-pesquisadora, quando foi possível que ela pudesse acompanhar de perto todo o processo de planificação, identificar e apontar as falhas que eles estavam cometendo e auxiliar na construção.

Quanto à persistência e motivação dos alunos observados nesse momento, Monteiro (2013, p. 44) afirma que o uso do material concreto nesta fase de iniciação da geometria espacial é muito valioso, pois “[...] além de estimular o aluno a observar, perceber as semelhanças e diferenças, as propriedades das figuras é também uma maneira de sair da rotina das aulas expositivas, motivando o aluno a ser participativo, transformando-se em uma forma divertida de ensinar e aprender”. Durante o processo de construção, foi perceptível a troca de informações entre os componentes do grupo, a ajuda entre eles e a ambição em construírem, de forma correta, as pirâmides.

Com as construções prontas, um integrante de cada grupo encheu sua pirâmide com areia e despejou no copo, utilizando em seguida o pincel para marcar o nível da areia, conforme apresentado na Foto 1. Foi então solicitado que comparassem os volumes que haviam encontrado e, em seguida, respondessem às questões contidas na folha de instrução.

Foto 1 – Alunos enchendo as pirâmides e marcando os níveis da areia no copo.



Fonte: Produção da autora, 2019.

Camacho (2012, p. 26) aborda que, quanto maior o envolvimento dos alunos com as atividades, “[...] maior será o conhecimento atingido pelos mesmos, uma vez que estes procurarão continuamente novas estratégias para desenvolver as suas próprias capacidades e, conseqüentemente, através da experiência direta, construirão os conceitos de acordo com o objeto explorado e observado”. A interação dos alunos, motivação e envolvimento no decorrer da experimentação foi rapidamente identificada e vista como instigadora, pois os alunos buscavam fazer, com análise e precisão, todo o processo manipulativo.

Nas questões contidas na folha de instruções, pedia-se para calcular a área da base da pirâmide que haviam construído. Como os polígonos eram retângulos, triângulos e hexágonos alguns alunos não recordaram de como era feito o cálculo da área do triângulo e hexágono, sendo necessária então a orientação da professora-pesquisadora. Também estava sendo perguntado qual das bases das pirâmides possuía a maior área, e neste momento cada grupo falou em voz alta os valores que havia encontrado, daí ficaram surpresos em constatar que todos haviam encontrado o mesmo valor.

Ao chegarem na última questão começaram a surgir algumas dúvidas. A questão perguntava era se o volume de uma pirâmide é maior ou menor que o de um prisma que tem a mesma base e a

mesma altura. Então, para melhor explicar essa questão, cuja dúvida já se previa que poderia surgir, foi primeiramente explicado, de forma expositiva, o Princípio de Cavalieri definido por Lezzi et al. (2016, p. 161) da seguinte forma: “Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes)”.

Em seguida, foi mostrado aos alunos um prisma de base triangular, feito de espuma floral já com os cortes prontos para obtenção de três pirâmides, e, também, a decomposição de um prisma em três pirâmides, feitas de papel cartão objetivando a que os alunos pudessem tocar e melhor visualizar na prática o conteúdo apresentado. Assim, foi observado com os estudantes que os volumes das três pirâmides formadas eram iguais e cedeu-se um tempo para que eles pudessem expor as conclusões que eles tiraram com a situação apresentada. Foi quando uma aluna se manifestou dizendo que o volume de uma pirâmide representava uma parte entre os três necessários para formar o volume do prisma todo.

Giostri; Silva (2014) apontam que ter ciência do processo e das possíveis dificuldades dos alunos pode favorecer o modo do professor proceder em sala de aula para minimizar as possíveis dúvidas que os discentes possam apresentar, além de propiciar ao professor a formulação de perguntas que possam impulsionar os questionamentos e conduzi-los ao conhecimento.

Desta forma, após os alunos formularem suas hipóteses, a professora-pesquisadora concluiu junto com eles que para o cálculo do volume do prisma, multiplicamos a área da base pela altura, e, como o prisma pôde ser dividido em três pirâmides de volumes iguais, pelo Princípio de Cavalieri, o cálculo do volume de uma pirâmide qualquer é um terço a área da base multiplicado pela altura. Na Foto 2, podemos observar as respostas das questões de um dos grupos pesquisados.

Foto 2 – Respostas de um dos grupos.

Pense e responda:

1) Qual das pirâmides possui o maior volume? O que podemos concluir desse fato?
 Todas possuem o mesmo volume.
 Independente da geometria da base, se a altura for igual a altura também o volume será igual.

2) Calcule a área da base de sua pirâmide e também meça a altura do canudo.
 Base Hexagonal
 $A_B = b \cdot h$
 $A_B = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$ $A_T = 24 \cdot 1,2$
 $A_T = 36 \text{ cm}^3$
 $A = \frac{b \cdot h}{2}$
 $A = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ cm}^2$
 $h = 1,2$

3) Qual das bases das pirâmides possui a maior área? Como podemos relacionar esse fato com a comparação dos volumes?
 nenhuma, todos são iguais.
 Análise de volume iguais resultam em volumes iguais.

4) Duas pirâmides com diferentes áreas de bases e diferentes alturas poderão ter o mesmo volume?
 Não.

5) O volume de uma pirâmide é maior ou menor que o de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura?
 Menor.

Fonte: Produção da autora, 2019.

Todos os grupos apresentaram as mesmas linhas de raciocínios nas respostas das questões, o que demonstra a assimilação, por parte dos envolvidos, dos conceitos abordados. Com isso, observou-se que a visualização, manipulação dos materiais e discussão acerca das construções permitiram interações e trocas de informações que possibilitaram alcançar o objetivo de construção do conceito de volume de pirâmides. Essa experiência vai ao encontro do exposto por Gervázio (2017), quando menciona que metodologia diferenciada desperta no aluno um olhar diferenciado para a Ciência, tornando-a mais simples e fazendo sentido sua aprendizagem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta da atividade era construir o conceito de volume de pirâmides utilizando materiais manipulativos, para que os alunos pudessem vivenciar na aula de matemática uma prática de ensino mais envolvente e capaz de minimizar as dificuldades na aprendizagem deste conceito da

geometria espacial. De acordo com a participação dos alunos em sala de aula, a interação com as atividades propostas e respostas às questões, é possível confirmar o alcance do objetivo.

A geometria espacial trabalhada de forma manipulativa possibilitou facilitar a assimilação dos conceitos pelos estudantes. Dessa forma, a figura em perspectiva apresentada nos livros não pode ser o único meio utilizado pelo professor para ensinar um conteúdo, uma vez que nem todos os alunos possuem os mesmos ritmos de aprendizagem. É necessário, então, utilizar outras práticas para abordar um mesmo assunto, ou seja, oportunizar diferentes meios de contato com a matemática.

Ao longo da pesquisa foi possível identificar como dificuldade dos alunos a construção da pirâmide com base hexagonal e os cálculos de área dos polígonos envolvidos. Dessa forma, sugiro para as próximas experiências que seja revisado o cálculo de área de alguns polígonos e que também seja discutido, nas pirâmides construídas, outros conceitos, tais como: área lateral e área total.

Por fim, reafirma-se a importância do uso de materiais manipulativos nas aulas de matemática e a utilização de novas práticas de ensino, tendo em vista proporcionar aulas mais interessantes e os estudantes sentirem-se motivados a aprender e compreender com maior facilidade os conteúdos abordados.

6 REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB 2006.

CAMACHO, Mariana Sofia Fernandes Pereira. **Materiais manipuláveis no processo ensino/aprendizagem da matemática: aprender explorando e construindo.** 2012. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade da Madeira, Funchal. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10400.13/373>>. Acesso em: 05 dez. 2018.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo Básico Escola Estadual:** área de Ciências da Natureza. Vitória: SEDU, 2009.

GERVÁZIO, Suemilton Nunes. Materiais concretos e manipulativos: uma alternativa para simplificar o processo de ensino/aprendizagem da matemática e incentivar à pesquisa. **C. Q. D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 9, p. 42 – 55, jul. 2017. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v09a04-materiais-concretos-e-manipulativos.pdf>>. Acesso em: 5 de dez. 2018.

GIOSTRI, Angélica Bergamini; SILVA, Sandra Aparecida Fraga. Visualizações e construções de sólidos geométricos no ensino médio. **Revista eletrônica Sala de Aula em Foco**, Vitória, p. 50 – 59, v. 3, n. 1, 2014. Disponível em: <<http://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/66>>. Acesso em: 9 dez. 2018.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações: ensino médio**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

MONTEIRO, Bruna Garcia. **O uso de material concreto para melhor visualização dos sólidos geométricos**. 2013. 74 f. Monografia (Graduação em Matemática), Faculdade de Pará de Minas, Pará de Minas. Disponível em: <http://fapam.web797.kinghost.net/admin/monografiasnupe/arquivos/31032014215758Monografia_-_Bruna_Garcia_Monteiro.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2018.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A utilização dos materiais manipulativos nas aulas de matemática**. In: VI Encontro de pesquisa em educação, 2010. Disponível em: <http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf>. Acesso em: 07 dez. 2018.