sala de aula em foco
Edição especial
ISSN 2316-7297

INVESTIGAÇÃO DO CONCEITO DE DIVISIBILIDADE COM ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, UTILIZANDO RECURSOS REMOTOS

RESEARCH ON THE CONCEPT OF DIVISIBILITY WITH MATHEMATICS DEGREE STUDENTS USING REMOTE RESOURCES.

LUIZ PAULO TEIXEIRA DE SOUSA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
luizmatematicaes@gmail.com

MARIA AUXILIADORA VILELA PAIVA
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
vilelapaiva@gmail.com

JORGE HENRIQUE GUALANDI
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
jhgualandi@gmail.com

Resumo: Este artigo é fruto de uma pesquisa realizada como parte das ações do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do Espírito Santo – Gepem-ES, vinculado à pesquisa Formação de Professores e Profissionalização na Formação do Professor que Ensina Matemática. Nele, retratam-se momentos de um estudo realizado com alunos de uma turma de licenciatura em Matemática, cujo objetivo foi discutir o conceito de divisibilidade numa perspectiva de uma Matemática para o ensino. O estudo foi marcado por uma abordagem metodológica nos moldes do *Concept Study*, de Brent Davis e seus colaboradores, a qual se desenvolveu de forma remota devido ao isolamento social decorrente da pandemia de covid-19. Essa metodologia configura-se como uma proposta de formação de professores que envolvem discussões coletivas centradas em um conceito matemático, colaboração e valorização da cultura matemática dos sujeitos envolvidos em busca da construção de uma Matemática para o ensino. Os resultados apontam a necessidade e importância da construção coletiva de saberes voltados para o ensino na formação inicial do professor de Matemática, articulando saberes científicos e escolares.

Palavras-chave: Divisibilidade. Formação inicial. Matemática para o ensino.

Abstract: *This article is the result of a research carried out as part of the actions of the Group of Studies and Research in Mathematics Education of Espírito Santo – Gepem-ES, linked to the research Teacher Education and Professionalization in the Formation of a Teacher Who Teaches Mathematics. It portrays moments of a study carried out with students from an undergraduate Mathematics class, whose objective was to discuss the concept of divisibility from the perspective of mathematics for teaching. The study was marked by a methodological approach along the lines of the Concept Study, by Brent Davis and his collaborators, which was developed remotely due to the social isolation resulting from the covid-19 pandemic. This methodology is configured as a proposal for teacher education that involves collective discussions centered on a mathematical concept, collaboration and appreciation of the mathematical culture of the subjects involved in the search for the construction of mathematics for teaching. The results point out to the need and importance of the collective construction of knowledge aimed at teaching in the initial formation of the mathematics teacher, articulating scientific and school knowledge.*

Keywords: *Divisibility. Initial formation. Mathematics for teaching.*

1 INTRODUÇÃO

Quando tratamos da formação de professores de Matemática, seja inicial, seja continuada, entendemos que, para propiciar a construção de saberes voltados ao ensino, é importante buscar práticas que se distanciem daquelas pautadas na ideia de transmissão de conteúdos ou apoiadas em uma matemática estabelecida, que não valoriza as transformações sociais nem a cultura matemática dos sujeitos envolvidos.

Nesse sentido, buscamos, em nossa pesquisa, identificar de que forma uma proposta de formação voltada à licenciatura em Matemática, que valoriza as discussões coletivas e o trabalho colaborativo em torno de um conceito matemático, pode contribuir para a construção de uma Matemática voltada para o ensino. Concordamos com Cade (2018), quando afirma: “É necessário a nosso ver que os cursos de formação inicial estimulem situações que permitam ao futuro professor elaborar o seu saber matemático para o ensino, e não apenas o saber sobre conteúdos específicos” (Ibid., p. 26).

Como parte das ações desenvolvidas pelo Gepem-ES, grupo de pesquisa ao qual estamos vinculados, e da pesquisa *Formação de Professores e Profissionalização na Formação do Professor que Ensina Matemática*, cadastrada no Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes (número de registro 20200217020227620), realizamos um estudo com alunos do curso de licenciatura em Matemática do Ifes – *campus* Cachoeiro de Itapemirim, matriculados na disciplina Teoria dos Números, no segundo semestre de 2020, ministrada pelo professor Jorge Gualandi. Essa disciplina tem por objetivo “Introduzir os elementos básicos da Teoria dos Números que servirão de base para o estudo das estruturas algébricas” (IFES, Licenciatura em Matemática, PPC, 2019, p. 287).

As autoras de Zazkis e Campbell (1996), pesquisadoras que se dedicam ao estudo da Teoria dos Números no campo da Educação Matemática, sugerem que o desenvolvimento da compreensão conceitual em Álgebra requer uma base sólida de entendimento dos conceitos presentes na Aritmética e na Teoria dos Números.

Pereira (2016) destaca a importância da Teoria dos Números na formação inicial do professor de

Matemática:

> O que pretendemos neste capítulo não é mostrar como deve ocorrer a dinâmica do curso de Teoria dos Números na Licenciatura em Matemática, mas sim chamar a atenção à necessidade de trabalhar tal disciplina com um olhar na formação de professores que irão construir essa teoria na escola básica, em um ambiente muito mais complexo – do ponto de vista da cognição, maturidade, relações sociais, capacidade de abstração, desencadeamento de raciocínio lógico-dedutivo-formal, etc. (PEREIRA, 2016, p. 54, *ipsis litteris*).

Resende (2007), por sua vez, apresenta diversos conceitos estudados na disciplina Teoria dos Números e importantes à educação básica. Entre eles, destaca a divisibilidade como um campo a ser estudado, envolvendo nele as noções de algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade e o Teorema Fundamental da Aritmética.

Nesse sentido, tomamos o conceito de divisibilidade como objeto matemático em nossas discussões, por entendemos sua relevância no currículo da educação básica, nível de ensino de atuação do futuro professor. Concordamos com Jesus Júnior (2013), quando assim ressalta:

> Embora os conceitos de divisibilidade, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum e números primos sejam pouco trabalhados na Educação Básica, acredita-se que problemas relacionados à Teoria dos Números tenham um potencial motivador no processo de ensino aprendizagem, pois são de fácil contextualização e possibilitam a elaboração de atividades didáticas capazes de desafiar os alunos, consolidam o aprendizado do conceito de divisibilidade além de promoverem o desenvolvimento do pensamento conceitual algébrico (JESUS JÚNIOR, 2013, p. 11).

Devido às restrições advindas da pandemia de covid 19, realizamos nosso estudo com ações remotas, o que tornou necessário pensarmos em uma proposta que contemplasse esse modelo de ensino, de modo que considerasse o aluno como construtor do próprio conhecimento. Desenvolvemos ações no Ambiente Virtual de Aprendizagem – *Moodle* e posteriormente realizamos um momento de discussões em uma aula síncrona com duração aproximada de duas horas. Finalizamos nosso estudo com a aplicação de um questionário eletrônico aos participantes, no intuito de identificar impressões sobre o processo formativo com a intenção de avaliarmos a viabilidade de futuras práticas nessa modalidade.

Neste artigo, apresentamos apenas um recorte de momentos em que foram discutidas ideias relacionadas à divisibilidade com vistas à construção de uma Matemática para o ensino na formação inicial de professores de Matemática.

2 FORMAÇÃO DE PROFESSORES E A MATEMÁTICA PARA O ENSINO

Os trabalhos apresentados em Shulman (1986; 1987) são frequentemente lembrados como ponto de partida, ao despertarem a importância de uma base de conhecimentos necessários ao ensino, destacando, entre eles, o conhecimento pedagógico do conteúdo – um saber específico do professor, que combina o conhecimento do conteúdo articulado à habilidade de ensino. Esse autor destaca que o conhecimento pedagógico do conteúdo

> [...] abarca os aspectos do conteúdo que são mais férteis para o ensino. Dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para os tópicos mais regularmente ensinados na área do conteúdo de cada um, as mais úteis formas de representação dessas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – em uma palavra a forma de representar e formular o assunto que o torna compreensível para outros (SHULMAN, 1987, p. 114, tradução nossa).

As contribuições de Shulman logo alcançaram o contexto da Matemática em que Ball, Thames e Phelps (2008) identificam, na prática do professor de Matemática, saberes necessários à sua atividade, que denominaram conhecimento matemático para o ensino, confirmando o caráter específico do fazer docente, já destacado por Shulman (1986; 1987).

No contexto da formação inicial de professores de Matemática, o matemático alemão Félix Klein (KLEIN, 2009) já enfatizava a necessidade de uma articulação entre a Matemática científica e a escolar, evitando o que ele denominou de “dupla descontinuidade”.

Brent Davis e seus colaboradores (DAVIS; RENERT (2009; 2014), DAVIS; SIMMT (2006), DAVIS (2010)), no entanto, voltam seus olhares à maneira como os professores desenvolvem uma Matemática para ensinar. Davis (2010) entende que, “[...] para transformar as salas de aula, é necessário estabelecer concepções de transformação para a matemática dos professores” (DAVIS, 2010, p. 64, tradução nossa).

Nesse sentido, Davis e seus colaboradores se inspiram nos trabalhos de Shulman, Ball e outros estudiosos, para formularem sua concepção de formação de professores, e enfatizam que cursos de formação de professores precisam acontecer, no sentido de proporcionar aos participantes a construção do que eles denominam uma Matemática para o ensino:

> [...] uma maneira de estar com o conhecimento de matemática que permite ao professor estruturar situações de aprendizagem, interpretar as ações do aluno com atenção e responder de forma flexível, de maneira a permitir que os alunos ampliem seus conhecimentos e expandam suas possibilidades de interpretação através do acesso a conexões poderosas e prática apropriada (DAVIS; RENERT, 2014, p. 11-12, tradução nossa).

Menduni-Bortoloti (2016) complementa que a Matemática para o ensino, conforme concebida por Davis e seus colaboradores,

> [...] tem como características ser dinâmica e emergente, pois está sujeita à experiência e ao envolvimento dos participantes, e é produzida no compartilhamento de suas ações recíprocas. Segundo Davis e Renert (2009), há um conhecimento pessoal e coletivo que é distribuído (à medida que é compartilhado) entre e pelos professores e pesquisadores (MENDUNI-BORTOLOTI, 2016, p. 20).

Tais reflexões nos conduzem a enxergar a formação inicial de professores de Matemática como local propício para a construção coletiva de uma Matemática para o ensino. Entendemos que os saberes dos licenciandos, na condição de alunos da educação básica e da licenciatura em Matemática, precisam ser valorizados e problematizados com vistas à construção de uma Matemática para o ensino.

3 O CONCEPT STUDY

No que se refere à produção e análise dos dados de nossa pesquisa, apoiamo-nos em Davis e seus colaboradores, quando apresentam um modelo de ensino e pesquisa na formação de professores de Matemática – o *Concept Study*, que, pautado no estudo coletivo e colaborativo de um conceito matemático, objetiva a construção de uma Matemática para o ensino.

Rangel (2015) enfatiza o *Concept Study* como “[...] um modelo potencialmente útil na formação inicial e continuada de professores” (Ibid, p. 95). Esclarece, ainda, que o *Concept Study* se configura como um “[...] modelo de estudo coletivo em que professores compartilham de forma colaborativa sua experiência e seu conhecimento com o objetivo de questionar e (re)elaborar seus próprios conhecimentos de matemática com vistas ao ensino" (RANGEL, 2015, p. 6).

As discussões em um *Concept Study* têm início por meio de uma pergunta disparadora, por exemplo: o que é multiplicação? Para respondê-la, cada participante apresenta um entendimento, recorrendo, para isso, a definições formais, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos (DAVIS; RENERT, 2014).

Mediante a pergunta disparadora, é gerada uma lista de entendimentos iniciais que podem ser interpretados e analisados, segundo Davis e Renert (2009; 2014), por meio de quatro ênfases: percepções (*realizations*); panoramas (*landscapes*); vinculações (*entailments*); e misturas (*blends*). Esses autores esclarecem que somente a ênfase percepções surge de forma intencional em um *Concept Study* e as demais emergem das discussões coletivas. Nesse sentido, o foco de nosso estudo estava em identificar as percepções e problematizá-las em busca da construção de uma Matemática para o ensino.

Davis e Renert (2014) destacam que, durante as discussões envolvendo um conceito matemático, ocorre uma reconstrução conceitual, ou seja, uma nova compreensão a partir de um entendimento preestabelecido – o *substruct*. Compreendemos que essa noção foi inicialmente pensada para a formação continuada de professores de Matemática; no entanto, observa-se que ela pode ser aplicada também à formação inicial, conforme resultados apresentados por Cade (2018) e Paiva, Cade e Giraldo (2020), o que nos leva a entender que é possível que licenciandos em Matemática apresentem (res)significações de um determinado conceito, a partir das discussões coletivas, ainda que não estejam diretamente atuando como professores, baseando-se em suas experiências como alunos da educação básica e da própria licenciatura.

Nesse sentido, todo o planejamento e execução das tarefas e problematizações em nossa pesquisa foram pautados por meio das características provenientes da metodologia *Concept Study*, o que nos proporcionou desenvolver nossa pesquisa remotamente em três etapas:

Etapa 1 – Discussão do conceito de divisibilidade por meio de dois fóruns abertos no *Moodle*.

O objetivo desta etapa foi identificar percepções iniciais que os licenciandos apresentariam com base em duas perguntas disparadoras: "O que é ser divisível?" e "O que é ser múltiplo?". Neste artigo, discorremos sobre a primeira.

Etapa 2 – Encontro síncrono na aula de Teoria dos Números com duração aproximada de duas horas. O objetivo principal desta etapa foi discutir coletivamente o conceito de divisibilidade mediante as percepções identificadas na etapa 1 e, com base nessas discussões, verificar indícios de (res)significações desse conceito com vistas ao ensino.

Etapa 3 – Aplicação de questionário com questões abertas para verificar indícios de (res) significações do conceito de divisibilidade, bem como impressões dos participantes quanto à abordagem metodológica utilizada pelos pesquisadores.

Nossa participação, na qualidade de pesquisadores, pautou-se nas características do *Concept Study*. Silva (2020) esclarece que uma das funções do pesquisador dentro desse modelo é a de mediador, conduzindo todo o processo formativo. Salienta, ainda, que o pesquisador investiga, com os participantes, diversas questões e ênfases que podem ser abordadas no estudo.

Nesse contexto, nossa pesquisa envolveu 12 dos 14 alunos matriculados na disciplina Teoria dos Números, que assinaram voluntariamente o termo de compromisso livre e esclarecido – TCLE. Esses participantes tiveram sua identidade preservada e, neste texto, os identificamos com nomes fictícios.

4 O QUE É SER DIVISÍVEL?

A primeira etapa da pesquisa foi marcada por dois fóruns abertos no *Moodle*. Ante a contribuição dos alunos no fórum 1 – "O que é ser divisível" –, identificamos a seguinte lista de percepções iniciais dos licenciandos:

Quadro 1 – Percepções: o que é ser divisível?

O que é ser divisível?
Quando dividimos um valor por outro e obtemos partes iguais e inteiras, sem sobrar resto.
Quando temos certa quantidade e conseguimos dividi-la em partes iguais sem que reste nada. No caso dos números, vamos ter uma divisão exata, ou seja, com resto igual a 0.

Quando temos um número e conseguimos dividi-lo por outro em partes iguais (essas partes devem ser inteiras), sem que reste nada, ou seja, resto igual a 0.
Quando um número é dividido por outro e a divisão é exata. Ou seja, não precisa acrescentar nenhum resto para chegar ao dividendo.
Um número é divisível por outro, quando o resto da divisão entre eles é igual a zero. E, quando o número não for divisível, teremos um resto (r), tal que r > 0.
Divisível é um número que é múltiplo de outros dois números. Quando é feita uma divisão, encontramos esse par de números e chamamos de divisor e quociente e o resto zero.
Quando divido um número pelo outro e o resto dessa divisão é zero. Ou seja, o dividendo é múltiplo de um divisor e um quociente.
Ser divisível é quando o resto da divisão é zero. E, para isso, creio ser necessário que sejam múltiplos entre si, o dividendo e o divisor.
Um inteiro é divisível por outro, quando o resultado também é inteiro e o resto é igual a 0. Quando isso acontece, também podemos dizer que divisor e dividendo são múltiplos.
Neste momento, acabo de passar por um *insight*, tentando compreender como eu explicaria o significado de ser divisível. Pensei exatamente da mesma maneira quando formulei a resposta sobre o significado de ser múltiplo, e o insight foi tão profundo, que não consigo mais dissociar essas duas ideias, pois para mim faz todo sentido que seja a mesma coisa agora. Pensando mais a fundo, acredito que ambas as ideias caminham juntas: se um número é divisível por outro, ele também é múltiplo desse número, como no exemplo que utilizei de múltiplo, eu disse que 8 é múltiplo de 2, e, de acordo com essa ideia que acabo de formular, se 8 é múltiplo de 2, logo é também divisível por 2, ao menos faz sentido pra mim utilizando respostas pertencentes ao conjunto dos números inteiros.
É estar de acordo com os critérios de divisibilidade.
Ser divisível é poder ser dividido em partes iguais. A divisão só será exata se o número for múltiplo do divisor. Para a divisão ser exata, o dividendo deve seguir o critério de divisibilidade do seu divisor.
Ser divisível é algo que se consegue dividir em maneiras iguais, sem que sobre resto, ou seja, se um número é divisível por outro e o resto dessa divisão for zero, então isso caracteriza "ser divisível". Para que determinada divisão sobre resto 0, é necessário que o dividendo seja múltiplo do divisor.

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

Como podemos perceber, a maioria dos participantes relaciona a divisibilidade com o conceito de divisão. As expressões *"divisão exata*" e *"resto zero"* confirmam este fato. Esse resultado vai ao encontro do estudo de Zazkis e Campbell (1996), envolvendo licenciandos em Matemática, quando constataram que a maioria dos participantes lançou mão da divisão como método para verificar a divisibilidade.

Pereira, Paiva e Freitas (2018) apontam que a concepção de "ser divisível" na Matemática acadêmica é distinta da escolar, na medida em que a primeira usa a multiplicação, para justificar o ser divisível, enquanto, na Matemática escolar, se justifica pela divisão exata. Ao observarem a aula de uma professora do ensino fundamental, esses autores ressaltam que "[...] é possível observar também que foi construído o conceito de divisível e múltiplo pela divisão exata. Essa construção é uma criação didática, pois só está no contexto da matemática escolar" (PEREIRA; PAIVA; FREITAS, 2018, p. 52).

Nas percepções 6, 7, 9, 12 e 13, vemos a associação da divisibilidade com a operação de multiplicação, ou seja, utilizando a ideia de múltiplo, uma forma que se aproxima da definição formal vista na disciplina Teoria dos Números, conforme esclarece Pereira (2016), ao examinar a forma como livros didáticos da educação básica apresentam o conceito de divisibilidade:

> [...] o conceito de divisibilidade é apresentado em duas definições: como resultado de uma multiplicação e pela verificação pela divisão exata. Por exemplo, para verificar se 321 é divisível por 3, o livro sugere buscar por um número inteiro que, multiplicado por 3 dê 321, o que se aproxima da definição tratada na Teoria dos Números, ou que o aluno efetue a divisão de 321 por 3 e verifique se o resto dessa operação é nulo; se assim for, conclui-se a divisibilidade de 321 e 3 (PEREIRA, 2016, p. 43).

Os dados obtidos na etapa 1 permitiram-nos concluir a eficácia da pergunta disparadora em propiciar o surgimento de percepções a respeito de um conceito matemático. Rangel (2015, p. 102) confirma que as percepções são "impressões que emergem da reflexão coletiva determinada a partir de uma questão disparadora". Davis e Renert (2014) esclarecem que as percepções dos participantes não devem ser vistas como certas ou erradas e destacam que elas são emergentes em um estudo coletivo:

> Para ser claro, a asserção e suposição aqui não é que qualquer percepção particular seja certa, errada, adequada ou insuficiente. É que a compreensão pessoal de um conceito matemático é uma forma emergente, surgindo nas complexas tramas de tais elementos experienciais e conceituais. No que diz respeito aos saberes do professor, propomos que as percepções são os 'objetos' ou 'agentes' do complexo sistema da matemática para o ensino (DAVIS; RENERT, 2014, p. 58, tradução nossa).

Desse modo, constatamos que a pergunta disparadora "O que é ser divisível?" contribuiu para o surgimento de entendimentos iniciais dos participantes em relação ao conceito de divisibilidade, o que evidencia a necessidade da valorização da cultura matemática desses sujeitos. A identificação desses entendimentos permitiu-nos problematizá-los e (res)significá-los com vistas ao ensino, conforme veremos adiante nesse texto.

5 O MOVIMENTO DE (RES)SIGNIFICAÇÃO

Um dos objetivos de uma formação pautada no *Concept Study* é proporcionar aos participantes (res)significações do conceito matemático em estudo com vistas ao ensino – o *substruct*. Em nossa pesquisa, observamos indícios dessas (res)significações tanto nas participações dos alunos nos fóruns no *Moodle* quanto no encontro síncrono e no preenchimento do formulário eletrônico.

Compreendemos que a construção de uma Matemática para o ensino desde a ampliação de entendimentos de conceitos matemáticos, conforme concebida por Davis e Renert (2014), dialoga com a noção do saber pedagógico do conteúdo preconizado por Shulman (1986; 1987). Isso fica claro nas falas dos participantes Pedro e Paulo, ao responderem à postagem da participante Bia no fórum "O que é ser divisível?", conforme descrito abaixo:

> ***BIA*** *– Ser divisível é quando temos certa quantidade e conseguimos dividi-la em partes iguais sem que reste nada. No caso dos números, vamos ter uma divisão exata, ou seja, com resto igual a 0.*
>
> ***PEDRO*** *– Essas "partes iguais" poderiam ser melhor entendidas se fossem descritas como partes inteiras, pois mesmo numa divisão com resto se continuarmos dividindo teremos a parte inteira mais uma parte decimal, ou seja, seriam partes iguais.*
>
> ***PAULO*** *– É interessante notar que nesse caso de divisibilidade em que obrigatoriamente necessitamos de resto 0, apenas assumimos respostas pertencentes ao conjunto dos números inteiros.*

A discussão acima nos permite enxergar indícios de construção do saber pedagógico do conteúdo pelos participantes Pedro e Paulo, pois são capazes de formular e apresentar seus entendimentos de forma a torná-los compreensível aos demais participantes.

Em relação à fala dos participantes Pedro e Paulo, ainda que justifiquem a divisibilidade por meio da divisão, ao enfatizarem que essas "partes iguais" devem ser inteiras e "apenas assumimos respostas pertencentes ao conjunto dos números inteiros”, em nosso entendimento tais falas dialogam com a definição de divisibilidade trazida por Domingues (1991, p. 101) como situada estritamente no conjunto dos números inteiros: “Diz-se que um número inteiro *a* divide um inteiro *b* se $b = ac$, para algum $c \in Z$”.

As discussões presentes no *Moodle* foram muito válidas, pois propiciaram aos participantes Paulo e Ana (res)significarem suas percepções a respeito da relação “ser múltiplo” e “ser divisível”, conforme destacado pelos próprios participantes:

> ***PAULO*** – *Nesse momento acabo de passar por um insight. Tentando compreender como eu explicaria o significado de ser divisível. Pensei exatamente da mesma maneira de quando formulei a resposta sobre o significado de ser múltiplo, o insight foi tão profundo que não consigo mais dissociar essas duas ideias, para mim faz todo sentido que seja a mesma coisa agora. Pensando mais a fundo, acredito que ambas as ideias caminham juntas, se um número é divisível por outro, ele também é múltiplo desse número, como no exemplo que utilizei de múltiplo, eu disse que 8 é múltiplo de 2, e de acordo com essa ideia que acabo de formular, se 8 é múltiplo de 2, logo é também divisível por 2, ao menos faz sentido pra mim utilizando respostas pertencentes ao conjunto dos números inteiros.*
>
> ***ANA*** – *Mesmo as duas ideias caminhando juntos, eu não percebia isso, logo não pensava assim, só fui perceber claramente esta ligação durante as aulas de Teoria dos Números.*

A expressão “O *insight* foi tão profundo” converge com Davis e Renert (2014), quando associam o termo *substructing* com a ideia de compreensão profunda da Matemática emergente. A esse respeito, Grilo, Barbosa e Maknamara (2020) enfatizam que

> Davis e Renert (2014) exploram o conceito de *substructing* na intenção de discorrer sobre o que significa uma compreensão profunda de um conceito. Segundo os autores, essa compreensão requer mais do que separar um conceito em partes, diferindo da ideia de descompactar, pois envolveria a análise de como essas partes se mantêm ou não unidas a depender do contexto sugerindo uma (re)formulação do conceito. Assim, à ideia de *substructing* disponibiliza-se a posição de sujeito reformulador de conceitos. Um(a) professor(a) capaz de desenvolver uma compreensão profunda sobre um conceito a ponto

ISSN 2316-7297

> de poder reformulá-lo, reconstruí-lo, transformá-lo de maneira criativa e não apenas descritiva/interpretativa como no processo de descompactar. [...]. (GRILO; BARBOSA; MAKNAMARA, 2015, p. 13, destaque como no original).

A expressão *"só fui perceber claramente esta ligação durante as aulas de Teoria dos Números"* trazida pela participante Ana confirma a importância e a necessidade de momentos na formação inicial de professores de Matemática que proporcionem aos licenciandos a articulação do conhecimento científico com o escolar. Entendemos que essa participante terá condições, em sua futura prática docente, de conduzir seus alunos a experiências de aprendizagem do conceito de divisibilidade, articulando o conhecimento científico com o escolar.

6 PROBLEMATIZANDO AS PERCEPÇÕES INICIAIS

No encontro síncrono, problematizamos várias das percepções que havíamos identificados nos fóruns do *Moodle*. Destacamos, neste texto, a problematização das percepções 8 e 9 (Quadro 1). A pesquisadora Paiva leu a percepção de número 9 que diz: *"Um inteiro é divisível por outro, quando o resultado também é inteiro e o resto é igual a 0. Quando isso acontece, também podemos dizer que divisor e dividendo são múltiplos*". Em seguida, levantou alguns questionamentos:

> ***PESQUISADORA PAIVA*** *– Eu quero entender o que significa dizer que dividendo e divisor são múltiplos! Temos também a questão de "múltiplos entre si" (referindo-se à percepção 8).*
>
> ***PEDRO*** *– Bom, minha resposta no fórum (referindo-se ao fórum 2 – O que é ser múltiplo?) foi a seguinte: Um número é múltiplo de outro quando ele é escrito na forma a * q = b, ou seja, b é um múltiplo de a. Nesse caso, tenho que dividendo e divisor são múltiplos.*
>
> ***PESQUISADOR SOUSA*** *– Mas a questão é: quem é múltiplo de quem?*
>
> ***PROFESSOR GUALANDI*** *– O divisor é múltiplo do dividendo ou o dividendo é múltiplo do divisor?*
>
> ***PEDRO*** *– Penso que o divisor é múltiplo do dividendo. Ou seria o contrário? Estou com dúvidas.*

PESQUISADORA PAIVA *– Então, o 4 é múltiplo de 12 ou o 12 é múltiplo de 4?*

PEDRO *– O 12 é múltiplo de 4, eu confundi os nomes.*

PESQUISADORA PAIVA *– Logo o dividendo é múltiplo do divisor.*

Da discussão acima inferimos que alguns participantes inicialmente apresentavam o entendimento de que, quando *b* é divisível por *a*, temos que *a* e *b* são múltiplos, ou ainda múltiplos entre si. Esses entendimentos apresentam inconsistência com a definição de divisibilidade, pois, conforme a definição de Domingues (1991, p. 101), se *a* divide *b*, podemos afirmar que *b* é múltiplo de *a* e não que *a* é múltiplo de *b*.

A nosso ver, foi importante problematizar esses entendimentos, pois são conceitos importantes para a compreensão de divisibilidade, os quais se fazem presentes na escola básica. Esse movimento proporcionou a articulação do saber científico com o escolar, conforme preconizou Klein (2009).

7 O QUE DISSERAM OS PARTICIPANTES?

Trazemos aqui algumas impressões dos próprios participantes em relação ao processo formativo. Para isso, analisamos os dados provenientes do formulário eletrônico, última etapa da pesquisa.

Um dos participantes afirmou que *"as discussões estabelecidas na aula foram muito interessantes, nos fez raciocinar e pensar além do que já estamos acostumados".* Essa fala nos permite inferir que as discussões coletivas propiciaram ao participante a compreensão do conceito de divisibilidade além do que ele talvez alcançasse individualmente. Esse entendimento vai ao encontro de Menduni-Bortoloti e Barbosa (2017), quando enfatizam que a Matemática para o ensino está atrelada à disposição participativa aprendida em um trabalho coletivo:

> O resultado não é um conceito a ser ensinado, mas o que é possível aprender sobre esse conceito, oferecendo inicialmente ao grupo o que se sabe. Dessa forma, relações, conexões e aprofundamentos só alcançaram esse dinamismo e complexidade conceitual porque um grupo, e não um indivíduo, construiu sofisticadas compreensões acerca do conceito. (MENDUNI-BORTOLOTI; BARBOSA, 2017, p. 949).

Encerramos a parte de análises apresentando as impressões dos participantes Marcos e Eva, que afirmaram respectivamente: *"As discussões foram muito proveitosas para qualquer licenciando, pois foram trabalhados conteúdos simples que são vistos normalmente no ensino fundamental de maneira profunda e séria". "Foram discussões que agregaram muito na minha formação, pois diante de um assunto considerado simples, tivemos uma conversa bastante profunda".*

A nosso ver, as expressões *"profunda e séria"* e *"bastante profunda"* não aparecem ao acaso nas respostas desses participantes, pois um dos objetivos de uma formação pautada no *Concept Study* é a compreensão profunda do conceito matemático em estudo (DAVIS, RENERT, 2014).

8 CONCLUSÃO

Os referencias teóricos e metodológicos que utilizamos em nossa pesquisa possibilitaram-nos preparar uma formação que propiciasse a discussão coletiva e a valorização da cultura matemática de cada participante envolvido. Desse modo, os dados obtidos permitem-nos enxergar a importância de proporcionar, na formação inicial de professores de Matemática, momentos que visem à construção coletiva de uma Matemática para o ensino.

Consideramos a relevância de estudos voltados à formação inicial de professores de Matemática que visem a uma abordagem que se distancie daquela tradicional, voltada à transmissão de uma matemática estabelecida e formalizada. Enfatizamos aqui a necessidade de mais momentos como esse, não só na disciplina Teoria dos Números, mas também em outras disciplinas do currículo de licenciatura em Matemática.

Por fim, entendemos que essas experiências podem ser adaptadas e/ou replicadas, de modo a proporcionar outros momentos de aprendizagem para alunos de licenciatura em Matemática, no modelo presencial ou remoto.

10 REFERÊNCIAS

BALL, Deborah; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special? In: **Journal of Teacher Education**, Washington-USA, 2008, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

CADE, Nelson Victor Lousada. Construção coletiva de uma matemática para o ensino de equações diofantinas lineares na formação inicial de professores. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). 2018. 104 p. **Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática**. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2018.

DAVIS, Brent (2010). Concept Studies: Designing settings for teacher's disciplinary knowledge. **Proceedings of the 34th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Minas Gerais, Brasil, 1, pp. 63-78.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, n. 3, p. 293-319, 2006.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, Canada, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New York: Routledge, 2014.

DOMINGUES, Hygino. H. **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991. 297 p.

GRILO, Jaqueline de Souza Pereira; BARBOSA, Jonei Cerqueira; MAKNAMARA, Marlécio. Discurso da Matemática Específica para Ensinar e a Produção do Sujeito 'Professor(a)-de-Matemática'. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 26, e20040, 2020.

JESUS JÚNIOR. Lucídio de. Teoria dos Números: um estudo com resolução de problemas na Educação Básica. 2013. 60 f. Dissertação – **Mestrado Profissional em Matemática** – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2013.

KLEIN, Félix. **Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior**. Volume II: Geometria. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

MENDUNI-BORTOLOTI, Roberta D´Angela; BARBOSA, Jonei Cerqueira. (2017). A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão Sistemática de Literatura. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 59, p. 947-967.

MENDUNI-BORTOLOTI, Roberta D´Angela. Um estudo sobre a matemática para o ensino de proporcionalidade. 2016. 142 f. Tese (Doutorado em Educação)- **Programa de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação**, **Universidade Federal da Bahia, Salvador**, 2016.

PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela; CADE, Nelson Victor Lousada; GIRALDO, Victor Augusto. Uma Matemática Problematizada para o Ensino de Equações Diofantinas Lineares na Formação Inicial de Professores. **Acta Latino Americana de Matemática Educativa**, 2020.

PEREIRA, Rubia Carla. Transposição didática: interações entre o sexto ano do ensino fundamental e a disciplina de teoria dos números em licenciatura matemática sobre o conceito de divisibilidade. 2016. 145 p. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). **Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo**. Vitória – Espírito Santo, 2016.

PEREIRA, Rubia Carla; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela Paiva; FREITAS, Rony Claudio de Oliveira. A transposição didática na perspectiva do saber e da formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, pp. 041-060, 2018.

PPC – **Projeto Pedagógico de Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – *campus* Cachoeiro de Itapemirim**, 2019. <https://www.ifes.edu.br/images/stories/publicacoes/cursos/graduacao/PPC_LICENCIATURA_EM_MATEM%C3%81TICA.pdf>. Acesso em: 12 de set. 2021.

RANGEL, Letícia Guimarães. Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo. 2015. 258 f. Tese (Doutorado) – **Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, 2015.

RESENDE, Marilene Ribeiro. Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura. 2007. 281 f. **Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo**, São Paulo, 2007.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, Lee S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harward Educational Review**, v. 57, p. 1-21, 1987.

SILVA, Elion Souza da. O conhecimento do Professor de Matemática do Ensino Médio Integrado: Perspectivas para a Formação de Professores. 2020. 186 f. Tese (Doutorado). **Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro**, Rio de Janeiro, 2020.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher´s understanding. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 5, 1996, p. 540-563.