ISSN 2359-4799

ANÁLISE NUMÉRICA DA TEORIA DE PLACAS VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Daniel Carvalho de Moura Candido[1]
Vitor Pancieri Pinheiro[2]
Natan Sian das Neves[3]
Carlos Friedrich Loeffler Neto[4]

Resumo

A ampla aplicabilidade das placas delgadas em engenharia estrutural impõe uma demanda de otimização no que tange aos métodos utilizados na análise de tais elementos. Dentre as técnicas disponíveis, o método de diferenças finitas (MDF) se destaca pela formulação matemática e implementação relativamente simples. No presente artigo é proposta a análise de placas delgadas sujeitas a carregamento uniforme nas condições de apoio simples e engaste via algoritmo autoral com base no MDF. Os resultados são comparados com soluções analíticas e com uma análise pelo programa SAP2000, demonstrando aderência consolidada das diferenças finitas com ambas vertentes de validação. O estudo revela o grande potencial do MDF nos campos acadêmico e prático voltados ao problema deformacional de placas.

Palavras-chave: Engenharia estrutural. Diferenças finitas. Teoria das placas delgadas.

NUMERICAL ANALYSIS OF THEORY OF THE PLATES BY MEANS OF THE FINITE DIFFERENCES METHOD

Abstract

The wide applicability of thin plates in structural engineering imposesa demand for optimization concerning the methods utilized in the analysis of such elements. Amongst the techniques available, the finite difference method (FDM) stands out due to its simple formulation and implementation. This article proposes an analysis of thin rectangular plates, subjected to uniform loading under the conditions of simply supported and clamped by means of a FDM based computer algorithm. The results are compared to analytical solutions and an analysis via SAP2000, exhibiting compatibility with both validation paths, which indicates the large potential of the finite difference method in application and research regarding thin plate analysis.

Keywords: Structural engineering. Finite difference methods. Thin plate theory.

1 Faculdade Brasileira. E-mail: danielcandido89@gmail.com
2 PPGEM, Universidade Federal do Espírito Santo. E-mail: vitor.pinheiro1987@gmail.com
3 Faculdade Capixaba da Serra. E-mail: natan.sian@gmail.com
4 PPGEM, Universidade Federal do Espírito Santo. E-mail: carlosloeffler@bol.com.br

ISSN 2359-4799

1 INTRODUÇÃO

No contexto dos diversos elementos clássicos utilizados na teoria de engenharia estrutural, placas se destacam pela ampla versatilidade de aplicação. Dentre as principais utilizações relevam-se as funções resistivas em lajes, a atuação como elementos de vedação em edificações, bem como a composição em fuselagem aeronáutica. Destacam-se também o uso recorrente na indústria naval e em projetos de elementos de máquina em engenharia mecânica (SZILARD, 2004).

De modo geral, há três abordagens fundamentais com as quais pode-se analisar um problema de engenharia. A priori, uma situação física pode ser abordada sob um viés teórico, tal que uma descrição fenomenológica é proposta dando origem a um modelo matemático que deve, por sua vez, ser solucionado. Soluções desse tipo envolvem a utilização de hipóteses simplificadoras no tratamento dos modelos considerados. Esse processo de simplificação nem sempre resulta em considerável discrepância entre tais soluções e o problema real, o que torna essa abordagem limitada à solução de casos com geometrias ordinárias e condições de contorno simples(CHAPRA; CANALE, 2011; CLÓVIS, 2013).

Uma forma alternativa de análise consiste na experimentação, que por sua vez lida diretamente com o problema físico de interesse, sendo capaz de produzir os resultados mais realísticos possíveis. Em contrapartida, a geração de dados empíricos confiáveis em relação a um fenômeno demanda alto nível de instrumentação técnica e, portanto, custos elevados, em linhas gerais (CLÓVIS, 2013).

Neste contexto, a simulação numérica busca solucionar problemas físicos de interesse através do desenvolvimento de soluções aproximadas. A análise via simulação numérica tem potencial de abordar problemas com geometria e condições de contorno complexas de forma dinâmica e versátil, em diversas áreas da engenharia. O avanço exponencial na capacidade de processamento de computadores e o amplo acesso a essas ferramentas possibilita a pesquisadores e engenheiros a execução de análises consistentes, em estações compactas com tempo reduzido. Tal agilidade de aplicação e confiabilidade, em conjunto com o baixo custo relativo dos computadores tornam a análise numérica conveniente para a indústria e a academia, viabilizando uma intensa atuação destes métodos na análise contemporânea de problemas de engenharia, dentre os quais se inclui a análise de placas delgadas (FORTUNA, 2000).

ISSN 2359-4799

2 TEORIA DAS PLACAS DELGADAS

Os elementos de placa são caracterizados por uma superfície plana cuja espessura possui uma magnitude pequena em relação às duas demais dimensões, sendo a razão entre elas o que classifica uma placa como elemento delgado ou espesso (HIBBELER, 2013).

A Teoria das Placas Delgadas (TPD) visa a modelar matematicamente o comportamento de placas carregadas por meio de uma equação diferencial. Com base na teoria da elasticidade, a TPD presume que os materiais analisados são perfeitamente elásticos, lineares, homogêneos e isotrópicos. Considera-se ainda não haver deformação no plano médio da placa e que seções inicialmente transversais a este plano se mantêm ortogonais à superfície deformada da placa após deformação. Em adição, as tensões de compressão perpendiculares à superfície são desconsideradas em função da altura pequena em relação às demais dimensões, o que configura caraterística clássica da formulação de placas delgadas (TIMOSHENKO, 1964; TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

O modelo diferencial que representa o comportamento de uma placa delgada sob carga é deduzido a partir de conceitos da análise de peças estruturais lineares adaptados para um elemento de superfície sob flexão pura. A equação de governo diferencial parcial de quarta ordem que representa o cerne da TPD é mostrada abaixo na Equação (1).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{1}$$

Uma vez definidas as condições de contorno apropriadas, a solução da Equação(1) determina a superfície deformada$w(x,y)$de uma placa submetida a um carregamento genérico$q$, cujas características mecânicas e geométricas são contabilizadas no módulo de rigidez à flexãoD, posto a seguir pela Equação (2).

$$D = \frac{Ee^3}{12(1-v^2)} \tag{2}$$

ISSN 2359-4799

O módulo de rigidez à flexão varia de acordo com as magnitudes da espessura (e) da placa, do módulo de elasticidade longitudinal (E) e do coeficiente de Poisson (v) do material constituinte do elemento analisado. À luz da teoria da elasticidade, têm origem também expressões para os esforços internos, adaptados para aplicação em placas. As expressões para os momentos e cortantes nas direções x e y são devidamente representadas pelo conjunto da Equação (3).

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) M_y = -D\left(v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$V_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) V_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (3)$$

O dimensionamento de um elemento estrutural deve necessariamente incluir uma análise dos esforços internos em adição ao cálculo de deformações, no intuito de determinar as maiores solicitações presentes, permitindo por sua vez mensurar a capacidade resistiva e, naturalmente, o atendimento às especificações de utilização e parâmetros de segurança para os quais foram projetados.

3 TRATAMENTO ANALÍTICO DO MODELO DE DEFLEXÃO DE PLACAS

As soluções exatas para a Equação (1) são limitadas, sendo necessário o desenvolvimento matemático de abordagens para casos específicos de carregamento e condições de contorno. Nesta linha, soluções satisfatórias foram produzidas pela representação da equação diferencial e do carregamento em termos de séries de funções harmônicas como apresentado na seção vigente.

3.1 Placas retangulares simplesmente apoiadas

Uma proposta de solução para este caso foi desenvolvida por C. Navier, e adaptada por P. Timoshenko, onde se considera uma placa de comprimento a e largura b sob efeito de uma carga genérica expressa em termos de um somatório de funções harmônicas da forma da Equação (4) (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

ISSN 2359-4799

$$w(x,y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\frac{m\pi x}{a} sen\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (4)$$

Posteriormente uma solução alternativa foi apresentada por M. Levy, na tentativa de simplificar a análise de deformação através da expressão das deflexões em um formato de solução baseado apenas em uma de suas dimensões planas (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959). O resultado final do desenvolvimento de tal proposição é representado a seguir na forma da Equação (5).

$$w(x,y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5}\left(1 - \frac{\alpha_m tanh\alpha_m + 2}{2cosh\alpha_m} cosh\frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2cosh\alpha_m}\frac{2y}{b} senh\frac{2\alpha_m y}{b}\right) sen\frac{m\pi x}{a}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (5)$$

As soluções analíticas acima apresentam convergência satisfatória utilizando apenas os primeiros termos das séries. É viável salientar que as soluções acima expostas diferem fundamentalmente em sua origem, na forma pela qual o método de separação de variáveis é proposto, havendo soluções mais contemporâneas baseadas em alterações análogas (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

3.2 Placas retangulares totalmente engastadas

A construção de uma solução para uma placa completamente engastada sujeita a um carregamento uniforme pode ser apresentada de forma conveniente através da superposição de soluções analíticas de casos correlatos. Para tanto, considera-se como base uma placa simplesmente apoiada submetida a carregamentos de momentos distribuídos em um par de bordos paralelos. Tal estrutura origina uma superfície de deformação como dado na Equação (6).

$$w(x,y) = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{sen\frac{m\pi x}{a}}{m^2 cosh\alpha_m} E_m \left(\alpha_m tanh\alpha_m cosh\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} senh\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (6)$$

ISSN 2359-4799

É importante destacar que a flecha genérica fornecida pela equação acima é dependente apenas de uma constanteE_m, cuja determinação tem relação direta com o formato da função momento adotada em cada um dos bordos paralelos (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

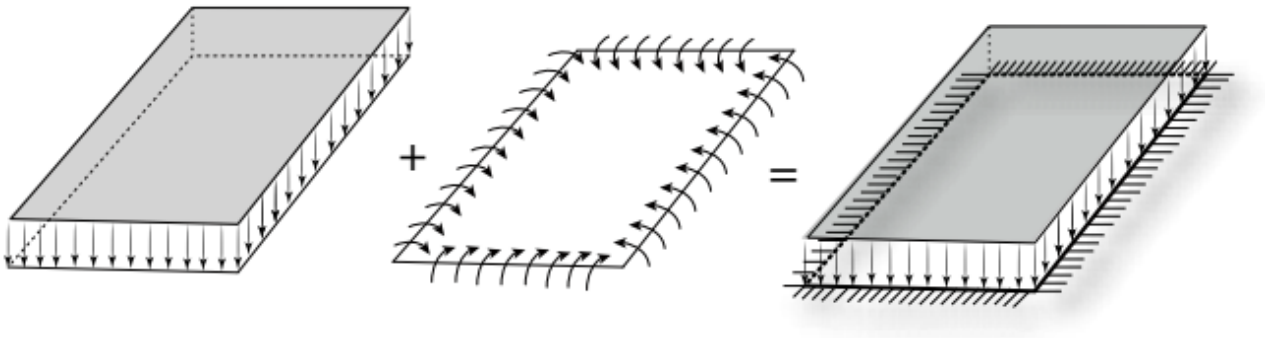
A solução de placas engastadas em suas quatro extremidades pode ser elaborada pela superposição de efeitos de uma placa simplesmente apoiada carregada uniformemente, dada a priori pela expressão de M. Levy na Equação (5), com outra placa submetida a carregamento de momentos distribuídos ao longo de todos os seus bordos, também na condição de simplesmente apoiada que depende da solução apresentada pela Equação (6). Esse conceito pode ser representado por um esquema, cujos termos somados representam as deformações em cada configuração como descritas anteriormente, gerando como resultado a representação engastada desejada trazida na Figura (1).

O princípio da superposição tem grande utilidade no tratamento analítico da equação de governo da deflexão de placas delgadas e é aplicado em diversos outros casos de vinculação e carregamento, assim como em inúmeros outros modelos matemáticos em engenharia, constituindo uma ferramenta conceitual de importância essencial (KREYSZIG, 2000).

Por fim é possível destacar que a mesma lógica de superposição é passível de ser aplicada na modelagem de placas com combinações arbitrárias de bordos apoiados e engastados, além do carregamento uniformemente distribuído, bastando apenas garantir a nulidade da inclinação nos bordos fixos. Tal processo é efetuado igualando a derivada da Equação (5) à derivada da Equação (6) nos bordos, de modo a determinar a constante$E_m$em termos de uma carga distribuída$q$. Após a substituição da constante na Equação (6), a expressão resultante tem seu sinal invertido, com o objetivo de reproduzir a influência matemática dos momentos reativos nos engastes. Além da inversão de sinal, a equação dos momentos, agora expressa em termos da carga distribuída, deve ser adaptada para o número de engastes apresentados pelo modelo. A expressão resultante é sobreposta à Equação (5). O desenvolvimento de soluções como as descritas acima não é trivial e envolve manipulações matemáticas extensas. A elaboração de diversas dessas soluções pode ser consultada no trabalho de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

ISSN 2359-4799

Figura 1 - Superposição da deflexão de placas



Placa sujeita a carregamento uniforme – apoio simples	Placa sujeita a momentos invertidos – apoio simples	Placa sujeita a carregamento uniforme - engaste

Fonte: Elaborada pelos autores.

4 METODOLOGIA CONCEITUAL DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

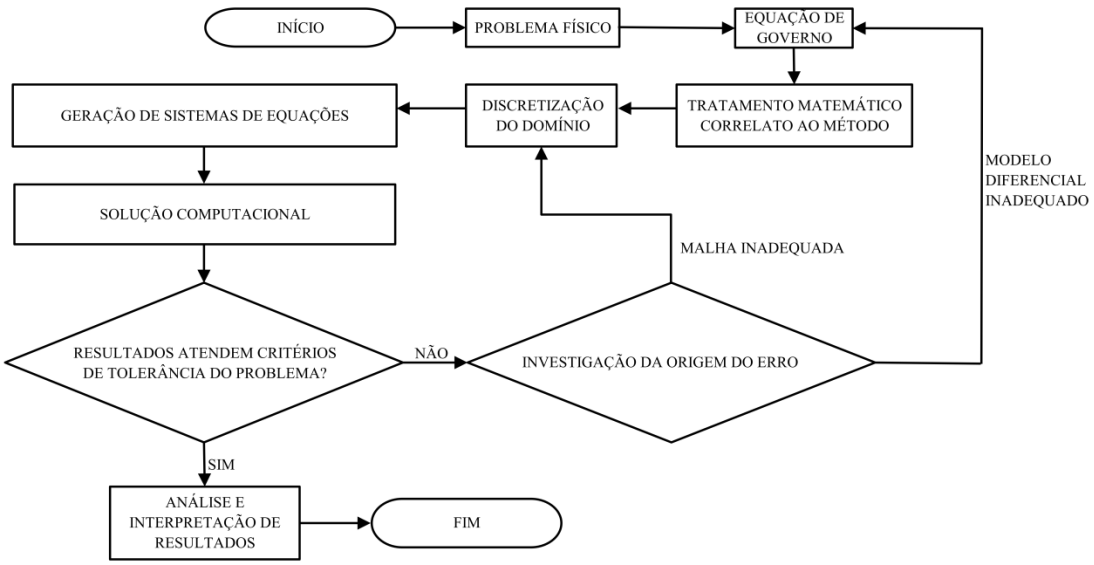
As soluções exatas desempenham um papel importante na solução de problemas de engenharia e na compreensão da física-matemática de um dado modelo. Entretanto, na grande maioria dos casos, tais soluções se limitam a problemas lineares com geometria simples. Métodos numéricos não partilham dessas limitações e possibilitam a análise e solução de modelos complexos em relação à geometria e às condições de contorno. A lógica central desses métodos baseia-se na aproximação da lógica contínua por um conjunto discreto de nós ou elementos nos quais as variáveis de interesse são calculadas (CHAPRA; CANALE, 2011).

Tais técnicas numéricas, por sua vez, recaem na demanda de solução de sistemas de equações lineares de grande porte. Nesse quesito, um ferramental com capacidade de processamento adequada se faz necessário, salientando a importância da computação científica para aplicação de métodos numéricos na simulação e análise de sistemas de engenharia.

ISSN 2359-4799

O processo de implementação computacional de um método numérico é composto por uma sequência de passos para garantir a produção de resultados aceitáveis. O fluxograma da Figura(2) expõe o algoritmo geral para a formulação numérica.

Figura 2 – Implementação computacional de método numérico



Fonte: Elaborada pelos autores.

O fluxo acima inicia-se baseado em uma equação diferencial de governo utilizada na tentativa de descrever um determinado problema físico. Neste passo, a escolha do método numérico a ser utilizado determina a maneira de executar o tratamento matemático sobre o modelo. No caso dos métodos diferenciais em específico o passo citado a priori condensa-se de certa forma com a etapa de discretização. Em contrapartida, nos métodos de natureza integral, há a necessidade de gerar a sentença integral representativa do governo do fenômeno antes de propriamente discretizar.

Uma vez convertido o domínio contínuo para discreto, um sistema linear pode ser organizado de maneira a contabilizar todas as variáveis desconhecidas de interesse. Em tal etapa, a solução do sistema é executada com auxílio computacional gerando resultados aproximados inerentes ao modelo. Por fim, a análise e validação de resultados baseia-se em referências analíticas ou experimentais que

ISSN 2359-4799

conferem coerência aos resultados. É importante destacar que a discrepância entre as previsões de referência e os resultados numéricos pode se dar, entre outras coisas, pela insuficiência de refinamento da malha ou por natureza inadequada do modelo matemático descritivo.

No âmbito dos métodos numéricos, existem diversas opções para tratamento da equação diferencial parcial da deflexão de placas, sendo as mais tradicionais os métodos de diferenças finitas (MDF), de elementos finitos (MEF) e também de elementos de contorno (MEC). A técnica das diferenças finitas, especificamente, se destaca como precursor na análise computacional em engenharia e apresenta como características essenciais a simplicidade de formulação matemática e versatilidade de aplicação (FORTUNA, 2000; HUGHES, 2012; SZILARD, 2004; KATSIKADELIS, 2014).

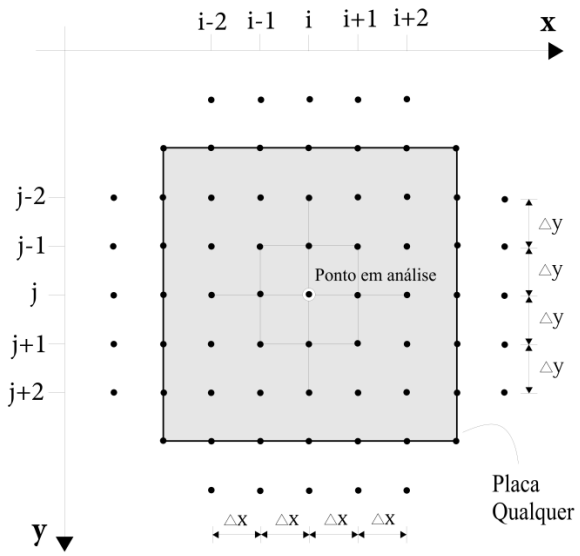
5 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas baseia-se de forma sucinta em aproximações das derivadas da equação de governo através de truncamentos feitos em expansões por séries de Taylor. A adoção de tal aproximação gera uma equação algébrica comum, capaz de descrever um problema contínuo através de um domínio discreto pela elaboração de um sistema de equações lineares (FORTUNA, 2000). Em específico, no caso da análise de deflexão em placas carregadas, o domínio deve ser discretizado em suas duas dimensões planas, uma vez que a deflexão varia em relação ao comprimento e à largura da estrutura. A Figura (3) representa a discretização de uma placa qualquer em uma malha de pontos bidimensional.

Uma vez discretizada a placa, é viável observar que a equação diferencial parcial de governo da teoria de placas delgadas apresenta duas derivadas parciais de quarta ordem da deflexãow em relação às coordenadas espaciais e uma derivada cruzada, também de quarta ordem. Tais derivadas podem ser aproximadas através da aplicação de expressões de diferenças centrais recorrentes na literatura correlata, gerando uma equação de diferenças finitas (EDF) que relaciona ações externas e características intrínsecas da placa com as deflexões em um ponto analisado, bem como em seus pontos adjacentes. A expressão algébrica resultante está posta pela Equação (7) a seguir (BARES, 1981).

ISSN 2359-4799

Figura 3 – Esquema de uma placa discretizada



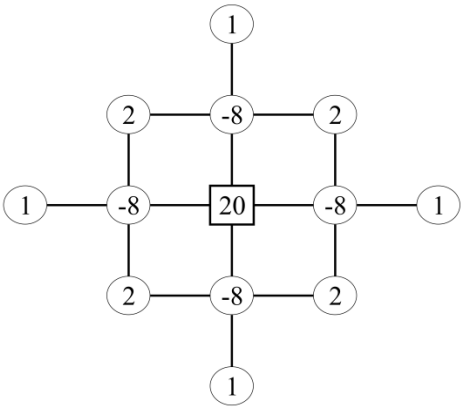
Fonte: Elaborada pelos autores.

$$20w_{i,j} - 8\left(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}\right) + 2\left(w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}\right) + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2} = \frac{h^4 q}{D} \quad (7)$$

No desenvolvimento da equação acima, presumem-se espaçamentos de malha Δx e Δy de mesma magnitude, expressa pela constante h. Tal equação pode ainda ser representada graficamente pelo modelo estêncil posto pela Figura(4), onde o valor no retângulo representa o coeficiente da deflexão no ponto em análise, enquanto os demais valores inscritos nos círculos correspondem aos coeficientes das deflexões nos pontos vizinhos (SZILARD, 2004).

ISSN 2359-4799

Figura 4 – Equação de diferenças finitas em formato estêncil



Fonte: Elaborada pelos autores.

Observa-se que próximo às extremidades da placa, a equação engloba pontos que não estão contidos no domínio discreto. Neste âmbito é preciso modelar a relação entre esforços internos e deflexões para expressar pontos externos em termos de pontos internos.

6 METODOLOGIA

A metodologia empregada nos testes numéricos tem como alicerce um algoritmo autoral em linguagem *octave* para a solução de placas delgadas sob vinculação apoiadas e engastadas em qualquer combinação. A confiabilidade dos resultados gerados via métodos numéricos, tanto em diferenças finitas quanto em elementos finitos com a versão educacional do software SAP2000, é garantida pelos testes de malha executados para todos os casos até que a malha não mais influencie nos resultados, de modo que dois refinamentos sucessivos retornem o mesmo valor.

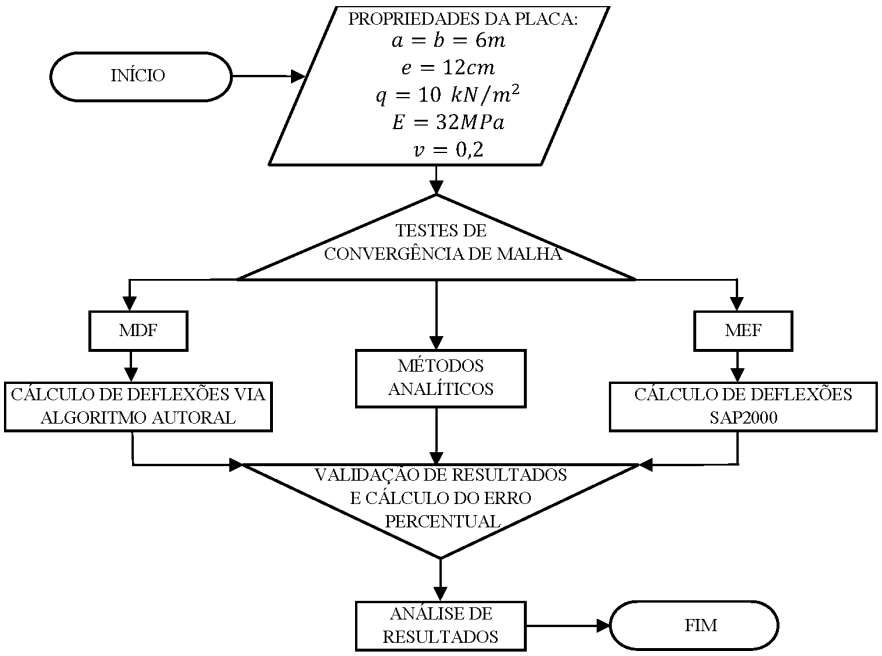
Após gerados os resultados numéricos, já livre da influência da malha, inicia-se a validação que utiliza como referência a solução analítica. Por fim, o erro adotado é constituído pelas diferenças entre resultados numéricos-analíticos em relação à solução analítica pertinente. Tal definição de erro é difundida na área numérica como apresentada em Fortuna (2000).

A escolha da solução analítica para validação de resultados em cada um dos cenários condiz com as formulações elucidadas em seções anteriores, servindo como referência consistente para testar o

ISSN 2359-4799

desempenho dos métodos numéricos. Uma visualização geral da metodologia do estudo está compactada no fluxograma da Figura (5).

Figura 5– Metodologia

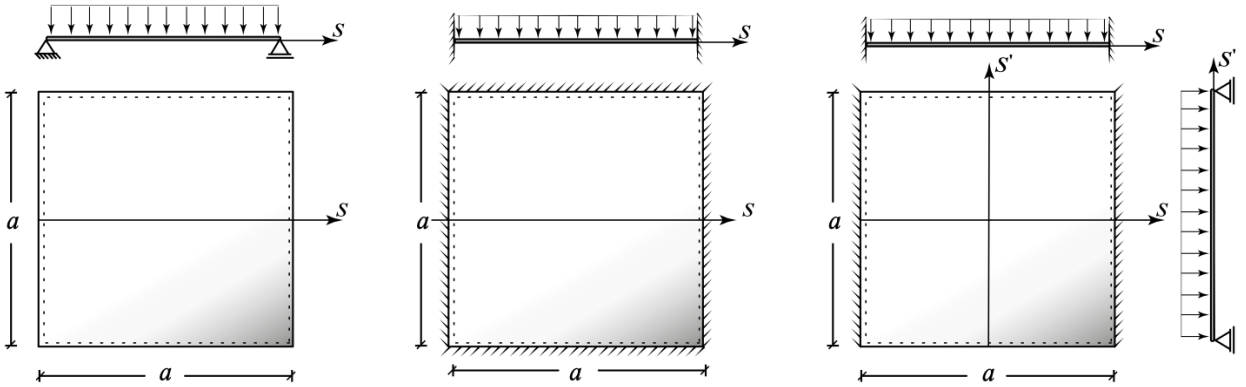


Fonte: Elaborada pelos autores.

As propriedades da placa indicadas no esquema foram utilizadas em todos os casos testados, de modo que a única variação entre os modelos foram as condições de contorno. Foram consideradas três combinações de vinculação: placa simplesmente apoiada, placa totalmente engastada e placa com dois bordos opostos engastados e dois bordos simplesmente apoiados. Essas três configurações são apresentadas na Figura (6), sendo todas as três submetidas a um carregamento uniformemente distribuído em sua superfície da magnitude indicada no fluxograma. As deflexões foram calculadas no centro da placa para cada configuração, já que é de interesse em âmbito de análise e projeto de estruturas a determinação das deformações máximas nos elementos.

ISSN 2359-4799

Figura 6 – Casos analisados



Placa Simplesmente Apoiada | *Placa Totalmente Engastada* | *Placa com dois bordos opostos engastados*

Fonte: Elaborada pelos autores.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 Estrutura geral do algoritmo autoral

Na seção vigente apresenta-se um pseudocódigo do algoritmo autoral desenvolvido para simulação numérica via Método das Diferenças Finitas, no intuito de ilustrar de forma sucinta a estrutura geral de programação utilizada. Para manter a exposição compacta, algumas partes do código foram omitidas e substituídas pela descrição breve das operações efetuadas pelo programa. Ressalta-se também que as informações inseridas em uma linha após o símbolo "%" representam apenas comentários elucidativos.

ISSN 2359-4799

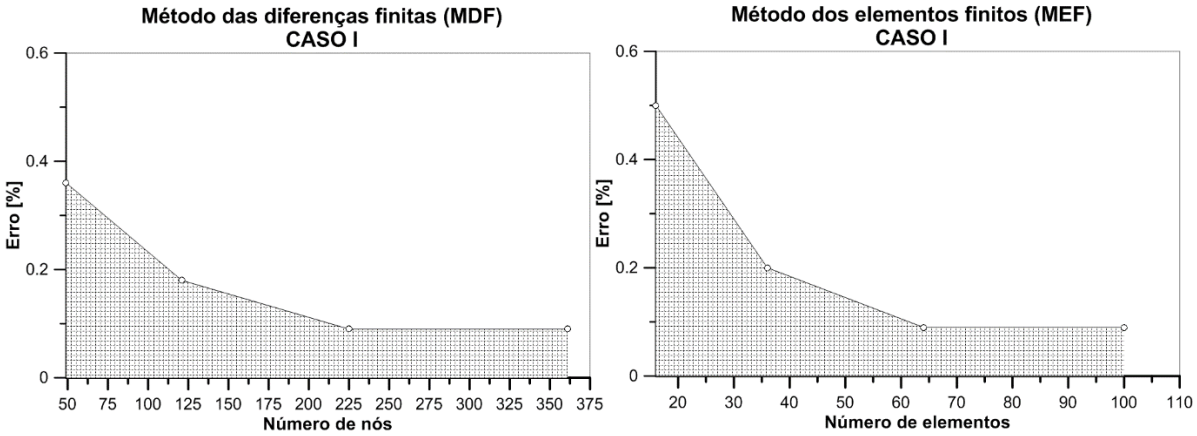
```
      INÍCIO DO PROGRAMA

ESCREVA"Informe o comprimento da placa em metros"
LEIA  comp
ESCREVA"Informe a largura da placa em metros"
LEIA  larg
ESCREVA"Informe a espessura da placa em metros"
LEIA  e
ESCREVA"Informe o valor do coeficiente de Poisson"
LEIA  poisson
ESCREVA"Informe o módulo de elasticidade longitudinal do material em MPa"
LEIA  Ecs0

Ecs = Ecs0*1000000;                 % TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES
D = Ecs*(e^3)/(12*(1-(poisson^2))); % MÓDULO DE RIGIDEZ À FLEXÃO

ESCREVA     "Informe o valor do carregamento em kN/m^2"
LEIA        q
ESCREVA     "Vinculação nos lados da placa(1-Ap.simples 2-Engaste)"
LEIA        lado1
LEIA        lado2
LEIA        lado3
LEIA        lado4
ESCREVA     "Informe a quantidade de nós na direção do comprimento da placa"
LEIA        nox

esp = nox-1             % NÚMERO TOTAL DE ESPAÇOS ENTRE NÓS
dist = comp/esp          % COMPRIMENTO DO ESPAÇO ENTRE OS NÓS
noy = (larg/dist)+1      % NÚMERO DE NÓS NA DIREÇAO DA LARGURA
W=zeros(noy, nox);        % ALOCAÇÃO DA MATRIZ DEFLEXÕES
nox2=nox-2;               % NÚMERO DE COLUNAS INTERNAS
noy2=noy-2;               % NÚMERO DE LINHAS INTERNAS
A=zeros(noy2)*(nox2);     % ALOCAÇÃO DA MATRIZ DE COEFICIENTES
B=ones((nox2)*(noy2),1); % ALOCAÇÃO DA MATRIZ Q/D
B=B.*(((dist^4)*Q)/D);    % ATRIBUIÇÃO DE VALORES À B

      CRIAR MATRIZ DE COEFICIENTES À PARTIR DA EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS

X=linsolve(A,B)          % SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR AX=B

SE Q<0
      Wmax=min(W);       % CÁLCULO DA DEFLEXÃO MÁXIMA P/ CARGA NEGATIVA
DO CONTRÁRIO
      Wmax=max(W);       % CÁLCULO DA DEFLEXÃO MÁXIMA P/ CARGA POSITIVA

      FIM DO PROGRAMA
```

ISSN 2359-4799

7.2 Caso I: Placa simplesmente apoiada

Os resultados analíticos para a deflexão no caso I são obtidos pelas Equações(4) e (5), e os resultados numéricos foram gerados como descrito. Os Gráficos (1) e (2) ilustram a convergência das malhas para ambos métodos numéricos, utilizando a medida de erro percentual previamente definida com base na Equação (8).

Gráfico 1 - Convergência via MDF **Gráfico 2** - Convergência via MEF



Fonte: Elaborados pelos autores.

A análise dos gráficos constata rápida convergência de ambos métodos numéricos, de modo que as duas técnicas indicam convergência com cinco ou menos refinamentos.

Tabela 1 – Análise geral de resultados - CASO I

Método	Categoria	Flecha [mm]
Navier	Analítico	10,97
Levy	Analítico	10,97
Algoritmo autoral	Numérico - MDF	10,96
SAP2000	Numérico - MEF	10,96

Fonte: Elaborada pelos autores.

ISSN 2359-4799

Como mostra a Tabela (1), as deflexões entre MDF e MEF apresentam resultados idênticos. Esse resultado não era esperado, em detrimento das diferenças na formulação de cada método no que tange à robustez. Quanto às soluções analíticas, ambos os métodos numéricos retornam erro de 0,1%.

7.3 Caso II: Placa totalmente engastada

Para tratamento do caso II, a superposição de efeitos das soluções analíticas locadas nas Equações(5) e(6) é utilizada. De forma padronizada o teste de malha do método de diferenças finitas e elementos finitos é mostrado por meio dos Gráficos (3) e (4). É possível notar claramente a monotonicidade na redução do erro com o refinamento de malha, mostrando consistência na formulação dos métodos.

Gráfico 3 - Convergência via MDF

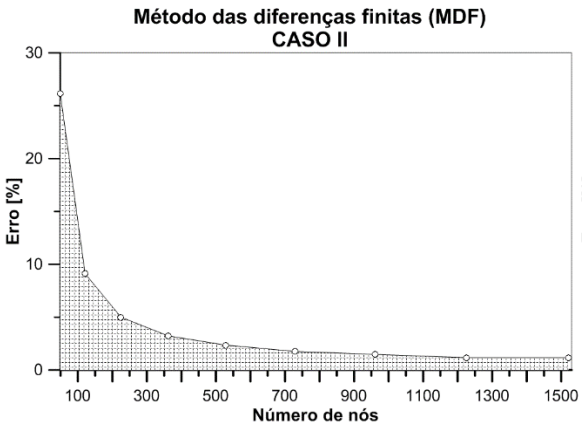
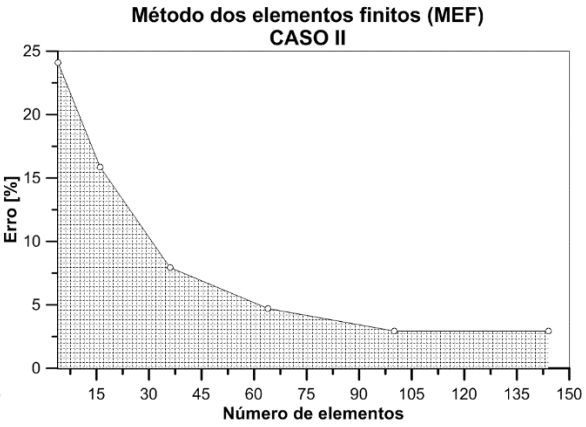


Gráfico 4 - Convergência via MEF



Fonte: Elaborados pelos autores.

Percebe-se menor semelhança nos Gráficos (3) e (4) do Caso II, em comparação aos mesmos gráficos do Caso I. Nesta análise é possível inferir que os métodos têm eficiências menos parelhas do que no primeiro caso, onde o MDF aparentemente tem convergência abruptamente mais veloz. A Tabela (2) apresenta os resultados gerais para a placa totalmente engastada

ISSN 2359-4799

Tabela 2 – Análise geral de resultados - CASO II

Método	Categoria	Flecha [mm]
Navier-Levy	Analítico	3,40
Algoritmo autoral	Numérico - MDF	3,44
SAP2000	Numérico - MEF	3,50

Fonte: Elaborada pelos autores

A divergência entre MDF e MEF exibe aumento em relação ao caso anterior, registrando erro de 1,70%. Apesar da diferença percentual, a lacuna entre os resultados em milímetros pode ser negligenciada para efeito de cálculo. O método das diferenças finitas apresenta divergência de 1,18% em comparação às soluções analíticas, já o MEF exibe erro de 2,94%.

Presume-se que o aumento considerável do erro percentual entre as simulações numéricas e a solução de Navier-Levy em relação ao caso anterior ocorre devido à influência dos engastes no tratamento matemático das condições de contorno. Em outra nota, acrescenta-se que os valores das flechas por SAP2000 exibiram comportamento decrescente com o refinamento da malha, em modo contrário ao do primeiro cenário, sendo que a origem desse comportamento não foi identificada.

7.4 Caso III: Placa com dois bordos opostos engastados e dois bordos simplesmente apoiados

No terceiro e último estudo, as soluções analíticas foram novamente fruto da superposição de efeitos, tal como mostrado no caso anterior, porém adaptada para a nova configuração de vinculação. Os demais resultados e os critérios de convergência foram reproduzidos de maneira idêntica aos casos antecedentes e segundo a metodologia estabelecida. A sequência de análise também se mantém em concordância com os processos adotados nos casos I e II, iniciando-se a partir da observação da progressão do erro percentual. A relação entre o refinamento das malhas e a divergência da solução obtida em relação à referência analítica pode ser apreciada nos Gráficos (5) e (6) abaixo.

De maneira similar ao caso anterior, as malhas testadas para o método dos elementos finitos apresentaram convergência de resultados decrescente, indicativo de que tal comportamento ocorre na presença do bordo engastado, porém a amostra de apenas três casos não é o suficiente para uma

ISSN 2359-4799

conclusão definitiva nesse âmbito, e testes adicionais são recomendados. Em relação aos casos I e II, foram necessários dois refinamentos de malha adicionais para que convergência fosse atingida por elementos finitos, indicando que a ocorrência de condições de contorno mistas exerce alguma influência na eficiência do algoritmo adotado para o SAP2000. A Tabela (3) compara as simulações numéricas com o resultado analítico do caso III.

Gráfico 5 - Convergência via MDF

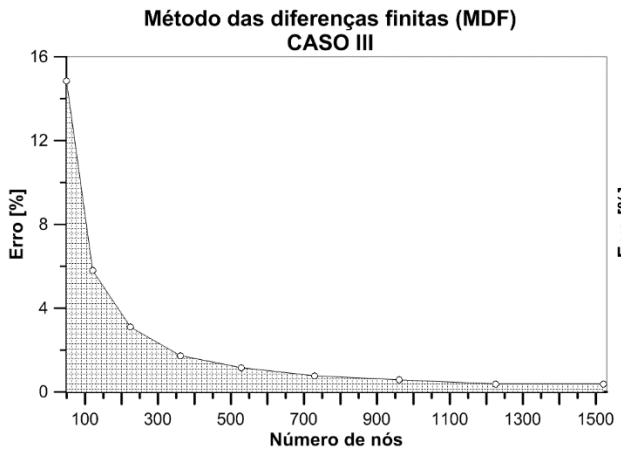
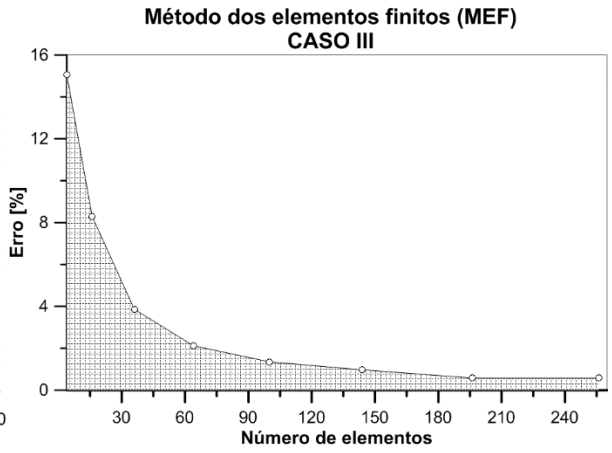


Gráfico 6 - Convergência via MEF



Fonte: Elaborados pelos autores

Tabela 3 – Análise geral de resultados - CASO III

Método	Categoria	Flecha [mm]
Navier-Levy	Analítico	5,18
Algoritmo autoral	Numérico - MDF	5,20
SAP2000	Numérico - MEF	5,21

Fonte: Elaborada pelos autores

Observa-se uma queda para 0,19% de divergência entre os métodos numéricos. Em relação à solução analítica, o método dos elementos finitos mais uma vez registra a maior discrepância, com erro de 0,58%. O MDF retorna um erro menor, de 0,38%. A queda da diferença entre os métodos numéricos

ISSN 2359-4799

e a solução analítica comparada ao caso II corrobora a presunção de que a presença de bordos engastados diminui a acurácia das simulações numéricas efetuadas.

Em suma, os três cenários retornaram resultados satisfatórios, nunca ultrapassando 3% de erro em relação às soluções analíticas do modelo matemático, considerado portanto verossímil ao comportamento deformacional de placas carregadas. Em outra nota, percebe-se uma pequena diferença de resultado entre métodos numéricos nos casos II e III, comportamento este justificado pela natureza distinta da formulação de cada método em conjunto com o nível de elaboração de cada algoritmo; devido a estas características, o resultado idêntico para ambas técnicas numéricas no caso I foi inesperado.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geração e análise dos resultados numéricos indica, de forma geral, um excelente desempenho do método das diferenças finitas no tratamento aproximativo do modelo de placas delgadas. Os resultados para as três combinações de vinculação propostas apresentaram boa aderência em relação às superfícies de deformação analíticas, em paralelo a uma concordância tal qual harmônica com o método dos elementos finitos. Os testes de malha para cada caso revelaram um comportamento monotônico do erro em relação ao nível de refinamento da malha, o que por sua vez indica a formulação consistente de ambos os métodos implementados. Em linha comparativa, os desempenhos absolutos do MEF, no que tange a valores do erro numérico, são maiores em dois dos casos testados, o que pode ser atribuído à formulação integral do método e, em contraparte, à estrutura fechada do algoritmo comercial. Em paradoxo, o MDF apresenta resultados com menor nível de erro, mantendo, entretanto, uma formulação matemática simples e implementação descomplicada, o que o torna relevante e atraente para análise de placas delgadas carregadas uniformemente.

A importância do entendimento conceitual dos fenômenos físicos correlatos à análise de estruturas e seus comportamentos deformacionais é sabidamente essencial para munir o engenheiro de ferramental técnico e crítico que promova uma atuação assertiva, tanto no mercado de trabalho quanto na geração de pesquisa na academia. Infere-se, portanto, que o domínio sobre os modelos matemáticos

ISSN 2359-4799

de interesse, assim como a ciência de suas limitações, é de caráter fundamental para atuação de engenheiros em nível de excelência.

Por fim, no contexto da engenharia moderna percebe-se um processo latente de mecanização do uso de softwares para projeto, análise e dimensionamento de estruturas, no sentido de proverem uma ferramenta absolutamente confiável e autônoma. Tal tendência não só é enganosa como sobremaneira perigosa em nível de projetos de grande importância, em especial envolvendo a vida humana. Para fins de esclarecimento, é viável salientar que a natureza real de uma ferramenta computacional é integralmente dependente do empenho intelectual do usuário projetista ou pesquisador. Sendo assim, a tecnologia só promove ganhos reais e sólidos para aqueles profissionais preparados tecnicamente.

9 REFERÊNCIAS

BARES, Richard. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**. [S.l.]: Gustavo Gili, 1981.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2011. 978-85-8055-011-5.

CLÓVIS, R. Maliska. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

FORTUNA, Armando de Oliveira. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. São Paulo: Pearson/Prentice Hall, 2013.

HUGHES, Thomas JR. **The finite element method**: linear static and dynamic finite element analysis. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

KATSIKADELIS, John T. **The boundary element method for plate analysis**. Elsevier, 2014.

KREYSZIG, Erwin. **Matemática Superior Para Engenharia.** Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.

SZILARD, Rudolph. **Theories and applications of plate analysis**: classical numerical and engineering methods. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 0-471-42989-9.

TIMOSHENKO, S. **Theory of elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1964.

TIMOSHENKO, Stephen P.; WOINOWSKY-KRIEGER, Sergius. **Theory of plates and shells**. New York: McGraw-hill, 1959.