

# ANÁLISE DINÂMICA DO MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Adriano Shineyder de Moraes Ramos<sup>1</sup>

Leonardo Aguiar do Amaral<sup>2</sup>

Patrick Rios de Souza<sup>1</sup>

Vitor Pancieri Pinheiro<sup>3</sup>

Natan Sian das Neves<sup>4\*</sup>

Daniel Carvalho de Moura Candido<sup>4</sup>

## RESUMO

Este artigo lida com a solução numérica do modelo dinâmico de Euler-Bernoulli a partir de uma formulação em diferenças finitas (MDF). De forma preliminar, é realizada uma análise de vigas com distintas configurações de vinculação, de forma a estabelecer uma relação entre a eficiência da convergência numérica e a forma de restrição dos graus de liberdade nos apoios. Na sequência, um teste de vibração forçada restrito a um carregamento súbito uniforme é executado e nele determinam-se os deslocamentos transversais da viga, tal como uma análise focada nos pontos críticos da curva de deflexão para as quatro condições de suporte testadas. As soluções analíticas são utilizadas como base para mensurar a performance do MDF, que, neste contexto, mostra-se como ferramenta assertiva, apresentando bons resultados para todos experimentos numéricos realizados.

**Palavras-chave:** modelo dinâmico de Euler-Bernoulli. diferenças finitas. vibração transversal.

---

<sup>1</sup> Faculdade Brasileira, Vitória / ES.

<sup>2</sup> Programa de Pós-Graduação em Física – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória/ES.

<sup>3</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória/ES.

<sup>4</sup> Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória/ES.

\* Autor para correspondência: natan.sian@gmail.com.

# DYNAMIC ANALYSIS OF THE EULER-BERNOULLI BEAM MODEL THROUGH FINITE DIFFERENCE METHOD

## ABSTRACT

This paper deals with the numerical solution of the Euler-Bernoulli dynamic model through a finite difference formulation (FDM). In a preliminary way, an analysis of beams with different support configurations is performed, in order to establish a relation between the efficiency of the numerical convergence and the form of restriction of the degrees of freedom in the supports. Subsequently, a forced vibration test constrained to a sudden uniform loading case is performed, where the transverse displacements of the beam are determined, such as an analysis focused on the critical points of the deflection curve for the four support conditions tested. The analytical solutions are used as a basis for measuring the performance of FDM, which in this context is shown as an assertive tool, presenting good results for all numerical experiments performed.

**Keywords:** Euler-Bernoulli dynamic model. finite differences. transverse vibration.

## INTRODUÇÃO

O fenômeno de deflexão, tal como vibração lateral de vigas, pode ser representado por quatro modelos matemáticos principais largamente encontrados na literatura: Euler-Bernoulli, Rayleigh, *Shear* e Timoshenko. Esses modelos diferenciam-se pelos efeitos físicos considerados, via hipóteses simplificadoras, o que gera resultados com distintos níveis de precisão a depender da aplicação de interesse (HAN; BENAROYA; WEI, 1999). Dentre as teorias postas *a priori*, a que resguarda a maior simplicidade é a de Euler-Bernoulli, vastamente utilizada na área estrutural prática, tanto quanto na academia, sendo capaz de gerar resultados satisfatórios se aplicada com respeito às suas limitações e premissas, em detrimento às outras teorias de viga, tal como a apresentada por Timoshenko (1937), cujo modelo para vibração de vigas foi explorado no trabalho de Carrer et al. (2013).

A fundamentação matemática utilizada como alicerce para os modelos citados anteriormente baseia-se em equações diferenciais parciais (EDP). Tais equações são de trato algébrico mais refinado, o que gera a demanda de técnicas específicas para a determinação de soluções analíticas. Todavia, ao depender da EDP em questão, esta tarefa pode ser de sobremaneira complexa ou, até mesmo, não possível, o que torna as soluções aproximadas o único meio

possível para obtenção de resultados. Existem métodos numéricos com robustez suficiente para solucionar esta classe de equações de forma precisa, dentre os quais destacam-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Neste estudo, a técnica de diferenças finitas é utilizada para gerar as soluções aproximadas, a escolha foi feita pois se tratar de um método com filosofia algébrica clara e de implementação relativamente simples, o que corrobora com a exploração conceitual pretendida pelo vigente desenvolvimento. Em adição, é importante ressaltar que são latentes as pesquisas acerca do tema proposto que utilizam outros métodos numéricos que não o apresentado, tal como pode ser ilustrado pelas pesquisas de Scuciato, Carrer e Mansur (2016) e Heyliger e Reddy (1988).

Gholampour *et al* (2017) avaliam a utilização de uma formulação de elementos finitos baseada em tensão e executam a análise estática e dinâmica de vigas com diversas condições de contorno comparando-a com a formulação de elementos finitos apoiada em deslocamentos. A configuração testada traz como grande vantagem a continuidade das tensões ao longo da malha nodal, além da continuidade dos deslocamentos. Prokić, Bešević e Lukić (2014) propõem um método numérico com aplicação possível em sistema de equações diferenciais de segunda ordem, para isso, testam a proposição em um modelo dinâmico de viga de Timoshenko e, em seguida, examinam o mesmo modelo com uma equação diferencial extra que contabiliza uma solicitação dinâmica flexo-torsional da viga. Franco e Chong (2016), em seu projeto, avaliam numericamente, via método de diferenças finita, um modelo de vibracional de viga de Euler-Bernoulli submetido ao carregamento de impacto. Scuciato e Carrer (2013) analisam o comportamento de um modelo dinâmico de Euler-Bernoulli via método de elementos de contorno, utilizando soluções fundamentais transientes, as quais se apresentam mais adequadas a este tipo de análise, e obtêm resultados satisfatórios quanto a precisão e estabilidade.

Considerando os fatos expostos, o estudo proposto no vigente artigo é uma análise do modelo de Euler-Bernoulli em sua versão dinâmica, codificado por uma rotina na linguagem *Octave*, a qual é caracterizada como sendo de alto nível e foi escolhida devido a sua simplicidade do trato de entidades matriciais, tal como sua eficiência em tópicos como matemática simbólica e como solução de sistemas lineares de forma prática. As simulações foram executadas no intuito de se determinar o comportamento desse modelo para diferentes configurações de vinculação da viga. Ademais, procurou-se obter uma relação entre o modelo dinâmico e o modelo estático. A estrutura deste trabalho consiste em uma apresentação teórica do modelo de Euler-Bernoulli na seção 2, seguida do detalhamento da formulação numérica via Método de Diferenças Finitas

na seção seguinte 3. Por fim, na seção 4, os resultados para simulações com diversas condições de contorno clássicas são apresentados e interpretados.

## A TEORIA DE EULER-BERNOULLI

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli, também chamada frequentemente de teoria clássica, foi proposta no século XVIII, quando Leonhard Euler aprofundou os estudos anteriormente realizados por Daniel e Jacob Bernoulli, conforme pode ser visto em maior profundidade em Euler (1744). Tal princípio considera, em sua formulação, o momento fletor e o deslocamento lateral como agentes causadores da deflexão e vibração das vigas (HAN; BENAROYA; WEI, 1999). As hipóteses simplificadoras adotadas como diretrizes são diversas, tal como pode ser apreciado na literatura em Beer et al. (2015), dentre elas, destaca-se a adoção da premissa de pequenas deformações, a negligência dos efeitos dos esforços cortantes sobre a deflexão lateral e a característica elástica-linear do material constituinte da viga, cuja matéria é distribuída de forma homogênea e cuja variação de propriedades ao longo das direções dá-se de maneira isotrópica.

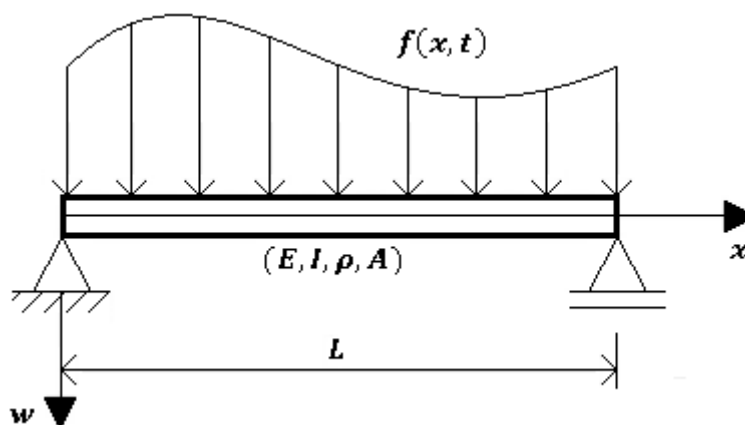


Figura 1 – Viga com carregamento arbitrário contínuo.

Fonte: Elaborada pelos autores.

O modelo de Euler-Bernoulli estabelece que a curvatura de uma viga elástica em qualquer ponto é correlata ao momento fletor interno atuante naquele ponto. Assim, por meio de um equilíbrio estático entre forças inerciais (internas-elásticas e externas-forçantes) e as devidas tendências de rotação, admitindo tais premissas é possível determinar a equação de governo para o modelo dinâmico de viga, dado pela equação 1.

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t)}{\rho A} \quad (1)$$

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2)$$

Na figura 1 pode-se correlacionar as incógnitas contidas nas equações 1 e 2 com o esquema didático a fim de elucidar o problema físico, sendo  $w(x, t)$  denotado como a deflexão da viga,  $f(x, t)$  é a carga externa,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $\rho$  é a densidade do material,  $A$  é a área da seção transversal,  $x$  é a variável espacial e  $t$  é a variável temporal. As variáveis do lado esquerdo da equação 1, que são inerentes à geometria e ao material que constitui a viga, são condensadas em apenas uma variável  $c$ , no intuito de simplificar a representação da modelagem matemática.

Em uma visão um pouco mais voltada para a vertente física, pode-se interpretar a equação 1 como um balanço de forças, em que o termo forçante do lado direito da equação e as forças de inércia influenciam no valor do primeiro termo diferencial do lado esquerdo, que representa a resposta em termos de carregamento interno na viga.

A equação 1 contém influências de variáveis temporais e espaciais, induzindo a imposição de condições iniciais e de contorno ao sistema. Considerando o esquema da figura 1, em cada extremidade da viga há duas condições de contorno que dependem do tipo de vinculação da estrutura, podendo assumir uma configuração apoiada, engastada ou livre. As informações providas podem ser quanto ao esforço cortante, ao momento fletor, à inclinação ou ao próprio deslocamento, conforme é sintetizado na Tabela 1.

**Tabela 1** – Condições de contorno referentes a cada tipo de extremidade.

	Livre	Simplesmente apoiada	Engastada
Esforço cortante ( $V$ )	Nulo	—	—
Momento fletor ( $M$ )	Nulo	Nulo	—
Inclinação ( $\theta$ )	—	—	Nula
Deslocamento ( $w$ )	—	Nulo	Nulo

Fonte: Elaborada pelos autores.

As informações da Tabela 1 são suficientes para a solução do problema de valor inicial referente à parte espacial da equação de governo, porque o esforço cortante, o momento fletor e a inclinação são grandezas relacionadas ao deslocamento vertical, por meio das equações diferenciais parciais 3, 4 e 5 abaixo.

$$V(x, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \quad (3)$$

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\theta(x, t) = EI \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (5)$$

Além das quatro condições de contorno fixadas, ainda são necessárias duas condições iniciais: o deslocamento vertical ( $w$ ) e a velocidade ( $v$ ) desse deslocamento no tempo inicial. Estas, por seu turno, são representadas pelo termo de forças de inércia no balanço de forças (a derivada parcial de segunda ordem da equação 1) e estão relacionadas entre si pela equação 6.

$$v(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \quad (6)$$

Para a solução analítica do problema de viga dinâmica, cuja a equação de governo é expressa pela equação 1, provem da aplicação do Método de Separação de Variáveis (MSV), no qual há uma proposta de solução que consiste no produto de duas funções, uma exclusiva da posição espacial  $x$ , denotada  $W(x)$  e conhecida como modo de vibração ou como função normal e outra dependente apenas de  $t$ , denominada de  $T(t)$ , como exposto pela equação 7 (RAO, 2014). A estrutura na equação 7, por sua vez, guarda forte significância conceitual, uma vez que a sobreposição de respostas harmônicas para vários modos de vibração resulta na formação do valor da deflexão pontual no contínuo da viga. Neste contexto, é possível inferir que todo problema de vibrações inclui também uma demanda de solução de uma sentença de autovalores, que resultam nas frequências naturais de vibração do sistema, dadas por  $\omega_n$ , que é capaz de determinar propriamente cada modo de vibração  $W_n(x)$ .

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) T_n(t) \quad (7)$$

A aplicação da separação de variáveis, apesar de definida por uma técnica matemática, resguarda muito da física da aplicação em questão, ao passo que tem nas frequências naturais  $\omega_n$  sua constante de proporcionalidade ao dividir a equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias em função do espaço e do tempo, tal como pode ser apreciado na expressão 8.

$$\frac{c^2}{W_n(x)} \frac{d^4 W_n}{dx^4} = \frac{-1}{T_n(t)} \frac{d^2 T_n}{dt^2} = \omega_n^2 \quad (8)$$

As equações para as frequências naturais  $\omega_n$  e para a variável auxiliar  $\beta_n$ , que considera estas frequências e características geométricas e constitutivas particulares da viga em questão, são devidamente postas algebrizadas nas equações 9 e 10.

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (9)$$

$$\beta_n^4 = \frac{\omega_n^2}{c^2} \quad (10)$$

A solução da expressão 8 envolve a resolução de duas equações diferenciais ordinárias cujas soluções são generalizadas, ou seja, não consideram um problema particularizado por condições iniciais e de contorno, tais equações são postas a seguir nos exemplos 11 e 12. A estrutura da sentença 11 mostra um número de constantes a determinar em mesmo número das condições de contorno que devem ser impostas ao problema de uma viga. Por outro lado, na equação 12, tem-se a presença de mais duas constantes,  $A_n$  e  $B_n$ , determinadas uma vez que conhecidas as condições iniciais impostas ao caso. Por fim, a terceira incógnita da equação 12 representa a influência do termo forçante  $f(x, t)$  na resposta da viga no domínio do tempo, que de forma mais elaborada contabiliza a vibração em regime permanente, causada pela força externa aplicada (RAO, 2014).

$$W_n(x) = C_1 \cos(\beta_n x) + C_2 \sin(\beta_n x) + C_3 \cosh(\beta_n x) + C_4 \sinh(\beta_n x) \quad (11)$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\rho A b(x) \omega_n} \int_0^t Q_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (12)$$

Ainda no último termo da expressão 12, há duas funções,  $Q_n(\tau)$  e  $b(x)$ , dadas pelas expressões abaixo em 13 e 14. A demonstração da expressão 12 envolvendo o terceiro termo consiste em uma tarefa relativamente complexa, em que há a utilização de conceitos de ortogonalidade funcional e de técnicas mais elaboradas de solução de equações diferenciais ordinárias, conforme pode ser apreciado em nível de detalhes adequado em Rao (2014).

$$Q_n(t) = \int_0^L f(x, t) W_n(x) dx \quad (13)$$

$$b_n = \int_0^L W_n^2(x) dx \quad (14)$$

Ademais, a função  $Q_n(\tau)$  da expressão 12, quando apresentada na equação 13, sofre uma alteração de parâmetro independente, esta se faz necessária para evitar confundir os índices  $\tau$

com o  $t$ . O índice  $\tau$  está relacionado com o intervalo de tempo compreendido entre 0 e  $t$  e, por conta disso, a integral apresentada na expressão 12 está relacionada a  $\tau$ , de forma a varrer todo o intervalo.

Por fim, vale destacar que este artigo trata de casos de vibração forçada, com a restrição de que a força externa atuante na viga é constante no tempo. Além disso, esta pesquisa restringe-se somente a quatro conjuntos de vinculação, sendo que cada um deles possui sua própria equação de frequência, que pode ser encontrada em Rao (2014). Tais conjuntos dizem respeito às extremidades da viga e são estes: apoio-apoio, engaste-engaste, engaste-livre e engaste-apoio dados pelas equações de 15 a 18, respectivamente.

$$\text{sen}(\beta_n l) = 0 \quad (15)$$

$$\cos(\beta_n l) \cdot \cosh(\beta_n l) = 1 \quad (16)$$

$$\cos(\beta_n l) \cdot \cosh(\beta_n l) = -1 \quad (17)$$

$$\text{tg}(\beta_n l) - \text{tgh}(\beta_n l) = 0 \quad (18)$$

## FORMULAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é uma técnica utilizada no intuito de gerar soluções numéricas aproximadas para equações diferenciais. O procedimento consiste na substituição das derivadas da equação de governo por aproximações baseadas em truncamentos da série de Taylor (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

A demanda de solução via aproximação por diferenças finitas justifica-se pela existência de diversos problemas na engenharia que envolve equações diferenciais parciais de soluções analíticas trabalhosas ou, até mesmo, não conhecidas. Na equação de governo do modelo de Euler-Bernoulli, as condições iniciais e as condições de contorno podem ser aproximadas de maneira a transcrever o problema em forma discreta. A aproximação de quarta ordem por diferenças centrais, utilizada na discretização da parte estacionária da equação de governo, é apresentada na equação 19, da mesma forma que a aproximação de segunda ordem por diferenças centrais, aplicada ao termo dependente do tempo, é mostrada expressão 20 (CHAPRA; CANALE, 2011).

$$\frac{\partial^4 w^k}{\partial x^4} \cong \frac{1}{(\Delta h)^4} (w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k) \quad (19)$$



$$\frac{\partial^2 w_i^k}{\partial t^2} \cong \frac{w_i^{k+1} - 2w_i^k + w_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} \quad (20)$$

É possível perceber na expressão 19 que, para uma aproximação desta ordem, cada nó  $i$  possui quatro nós vizinhos. Enquanto que a expressão 20, por tratar de uma aproximação de derivada de segunda ordem com respeito ao tempo, mostra dois instantes no tempo em torno do instante  $k$ . Tais aproximações são utilizadas na expressão diferencial ordinária provinda da separação de variáveis e posta a seguir, por meio da equação 21.

$$\frac{EI}{(\Delta h)^4} (w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k) + \rho A \frac{w_i^{k+1} - 2w_i^k + w_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} = f_i^k \quad (21)$$

A equação 21 pode ser reorganizada na forma da equação 22, de modo a se isolar o termo representante do deslocamento do nó central com um passo no tempo.

$$w_i^{k+1} = \frac{(\Delta t)^2}{\rho A} \left[ f_i^k - \frac{EI}{(\Delta h)^4} (w_{i+2}^k - 4w_{i+1}^k + 6w_i^k - 4w_{i-1}^k + w_{i-2}^k) \right] + 2w_i^k - w_i^{k-1} \quad (22)$$

As três equações diferenciais (3, 4 e 5) referentes às condições de contorno podem ser discretizadas conforme as equações de 23 a 25.

$$\frac{\partial^3 w_i^k}{\partial x^3} \cong \frac{w_{i+2}^k - 2w_{i+1}^k + 2w_{i-1}^k - w_{i-2}^k}{2(\Delta h)^3} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 w_i^k}{\partial x^2} \cong \frac{w_{i-1}^k - 2w_i^k + w_{i+1}^k}{(\Delta h)^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial w_i^k}{\partial x} \cong \frac{w_{i+1}^k - w_{i-1}^k}{2\Delta h} \quad (25)$$

E entre as duas condições iniciais, citadas na seção anterior, uma, referente à velocidade inicial, é dada por uma equação diferencial na equação 6 e pode ser transcrita para a forma discreta conforme a expressão 26.

$$\frac{\partial w_i^k}{\partial t} \cong \frac{w_i^{k+1} - w_i^{k-1}}{2\Delta t} \quad (26)$$

Em resumo, realizar todas estas aproximações é alterar a abordagem contínua do problema para uma abordagem discreta, ou seja, não é calculada a deflexão em todo o contínuo do domínio, e sim em pontos discretos dele, criando-se assim uma malha de pontos em que são realizados todos os cálculos.

Como o modelo clássico se trata de um problema de dimensões espacial e temporal, em cada instante de tempo surge uma malha na forma de vetor, com pontos a  $\Delta x$  de distância entre si.

Analogamente, cada instante de tempo (passo no tempo) se separa dos instantes vizinhos por um intervalo  $\Delta t$ .

Como aponta Çengel e Ghajar (2012), se a variação temporal utilizada não for suficientemente pequena, as soluções obtidas oscilam severamente e divergem da solução real, no caso de uma discretização explícita tal como posta na equação 22. Há métodos para se contornar esta deficiência e se determinar um valor limite para a variação do tempo  $\Delta t$ , podendo este ser encontrado por meio de uma análise física do problema ou matematicamente, a partir, por exemplo, da análise de estabilidade de von Neumann (OZISIK, 1994).

Neste problema, o ponto que deve possuir a maior contribuição é o ponto cuja posição é a mesma do termo que foi isolado, portanto seu coeficiente deve ter valor positivo. Fazendo com que todos os coeficientes que multiplicam o termo de posição  $x$  sejam positivos e isolando o passo no tempo, tem-se a condição de estabilidade, como mostrada a seguir.

$$\Delta t < \sqrt{\frac{\rho A \Delta x^4}{3EI}} \quad (27)$$

Com a condição apresentada na equação 27, temos uma restrição para o tamanho do passo no tempo de forma que os resultados não se tornem divergentes. Ao utilizar um passo no tempo que seja inadequado, ou seja, que não respeite essa restrição, os resultados apresentados pelo problema se tornam, a cada passo no tempo, mais distantes do resultado esperado, até que tendam ao infinito.

Ademais, para a validação do critério de estabilidade, foram realizadas três simulações: a primeira com valor do passo no tempo igual ao critério de estabilidade, a segunda com um valor aproximadamente 15% menor e a terceira com um valor cerca de 25% menor. A primeira simulação apresentou, com poucos passos no tempo, resultados oscilando entre o infinito positivo e negativo, enquanto as outras duas simulações apresentaram os resultados esperados. Dessa forma, a rotina foi elaborada utilizando-se valores de passo no tempo de acordo com a segunda simulação testada, conforme é mostrado a seguir.

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\rho A \Delta x^4}{4EI}} \quad (28)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para todas as simulações, foram utilizadas as mesmas configurações de carregamento e de viga dadas pela Tabela 2. Como já citado, as simulações foram restritas a quatro conjuntos de

vinculação: apoio-apoio (AA), engaste-engaste (EE), engaste-livre (EL) e engaste-apoio (EA). Para cumprir os propósitos desse estudo, uma malha será considerada como tendo convergido se a taxa de erro for inferior a 1,5%.

**Tabela 2** – Dados referentes às simulações.

Módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ )	69 GPa
Massa específica ( $\gamma$ )	2700 kg/m <sup>3</sup>
Área de seção transversal ( $A$ )	0,21 m <sup>2</sup>
Momento de inércia ( $I$ )	0,0086 m <sup>4</sup>
Comprimento ( $l$ )	1 m
Carregamento uniformemente distribuído ( $f(x, t)$ )	10 kN/m

Fonte: Elaborada pelos autores.

O primeiro conjunto de simulações teve como objetivo validar a rotina elaborada e permitir a realização de uma primeira análise da acuidade do MDF em relação às vinculações. Nestas simulações, foi realizado somente o refinamento da malha espacial, ou seja, o passo no tempo foi mantido constante, assumindo um valor de acordo com a equação 28 aplicada para a última malha, que possui o maior refinamento espacial. Dessas simulações, foi coletado o erro médio referente à comparação entre todo o conjunto de resultados numéricos com o analítico (Figura 2).

Na figura 2, pode-se observar a convergência das malhas, com erros inferiores a 1,5% a partir da malha de 31 nós espaciais. A análise do gráfico mostra que, inicialmente, o conjunto vinculativo EE possui menor precisão de resultados, seguido de EA, EL e, por último, AA. Porém, após o refinamento de 31 nós espaciais, observa-se que o conjunto EL é superado pelos conjuntos EE e EA, tornando-se então o menos preciso, fato que se mantém até mesmo na malha de 61 nós. Observa-se, portanto, dois fenômenos: uma imprecisão inicial e uma dificuldade de convergência.

Para explicar esses dois fenômenos, elaborou-se a seguinte hipótese: a imprecisão inicial observada é consequência do grau de rigidez do conjunto de vinculações e, por conta disso, o conjunto AA gera a maior acuidade e o conjunto EE, a menor; já a dificuldade de convergência é causada pela natureza da condição de contorno da vinculação, o que explica o porquê da vinculação EL convergir mais lentamente, uma vez que o vínculo livre possui uma derivada de terceira ordem como condição de contorno, enquanto os outros tipos de vinculação possuem condições de contorno restritas a segunda e a primeira ordem.

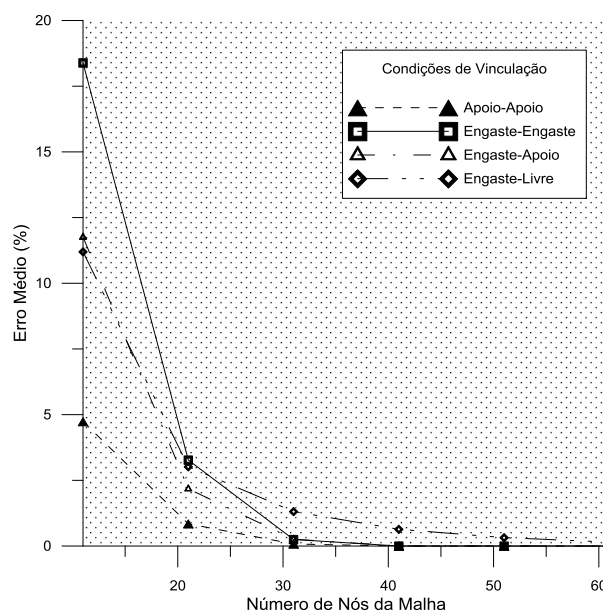


Figura 2 – Erro médio.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Essa hipótese não se relaciona com a natureza dinâmica do problema, mas sim com a natureza das vinculações, portanto espera-se que ao se aplicar as mesmas condições em um problema estático, tal comportamento se repita. Por conta disso, foram realizadas simulações de sistema estático, ou seja, sem a presença do fator tempo. nesse sentido, o gráfico seguinte apresenta os resultados destas simulações.

Por se tratar de um problema mais simples que o caso dinâmico, não é necessário um refinamento espacial tão apurado para se obter resultados satisfatórios. Como esperado, o comportamento apresentado no caso dinâmico foi também observado no caso estático, porém em menor escala devido à diferença de simplicidade entre os modelos estático e dinâmico.

Entretanto, embora tenham um bom embasamento, essas duas análises ainda não são conclusivas. Para se confirmar a hipótese apresentada, é necessário avaliar se o comportamento é exclusivo do modelo ou do método numérico utilizado neste estudo. Ao se observar a análise realizada por Carrer et al (2012), constatou-se que tal comportamento se repetiu, mesmo com a utilização do modelo de Timoshenko simulado via MEF, o que elimina a possibilidade do comportamento estar relacionado, exclusivamente, ao modelo de Euler-Bernoulli ou ao MDF.

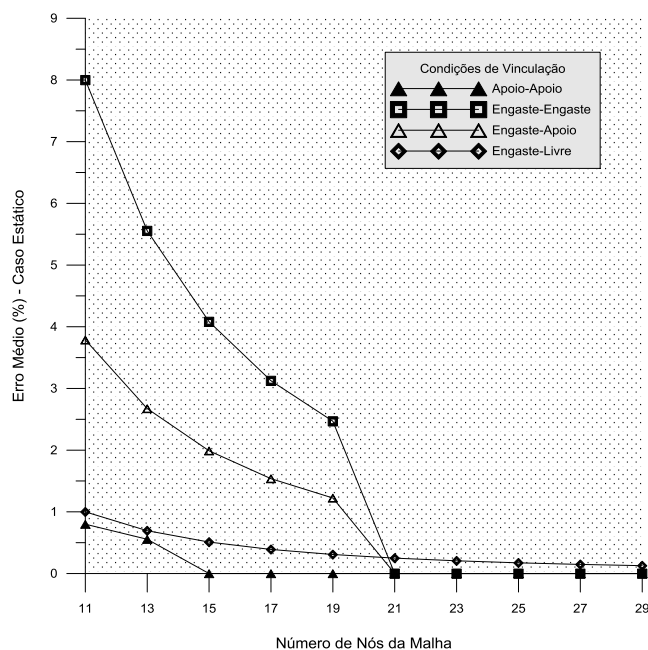


Figura 3 – Erro médio no caso estático.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Também procurou-se observar o modo como os resultados do modelo dinâmico se relacionam com o modelo estático. No modelo dinâmico, ocorre uma oscilação dos valores das flechas no tempo, ou seja, a estrutura vibra, tal efeito, contudo, é diferente do que acontece no modelo estático. Dessa forma, a relação entre os resultados dos dois modelos é estabelecida por meio da comparação do valor obtido da flecha de equilíbrio da oscilação com aquela modelo estático de viga, como pode ser visto na figura 4. Assim, esperava-se que o cálculo da média das flechas, ao longo do tempo, de um ponto qualquer, resultasse no próprio valor da flecha estática.

Ao se realizar as simulações e coletar esses dados, gerando-se uma curva com a média das flechas dinâmicas e o cálculo do erro desta em relação à curva estática, observou-se uma convergência de resultados, evidenciando que essa correspondência entre o modelo dinâmico e o estático é válida. Também foi identificado um comportamento anômalo, no qual essa convergência ocorre acompanhada de uma oscilação no valor dos erros médios comparativos, tal como pode ser visto na figura 4.

Para garantir que este comportamento não seja ocasionado por um desequilíbrio entre o refinamento espacial e o temporal, foi realizada uma outra bateria de simulações, na qual o passo no tempo de cada malha foi determinado conforme a equação 28. Os resultados destas simulações estão apresentados na figura 5, na qual pode-se perceber o comportamento oscilatório citado no parágrafo anterior.

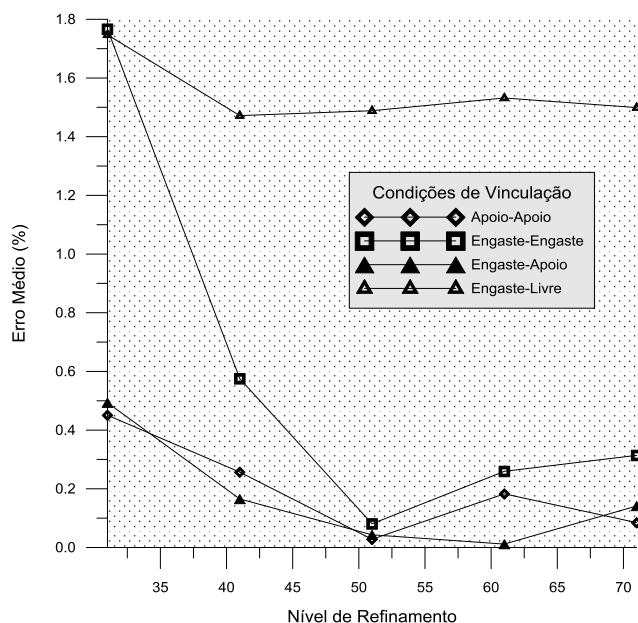


Figura 4 – Relação flecha média dinâmica e flecha estática com refinamento espacial.

Fonte: Elaborado pelos autores.

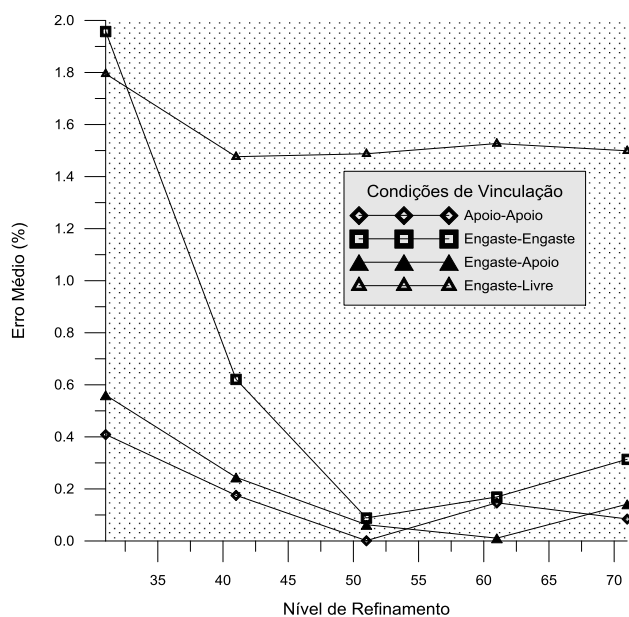


Figura 5 – Relação entre dinâmico e estático com refinamento espaço-temporal.

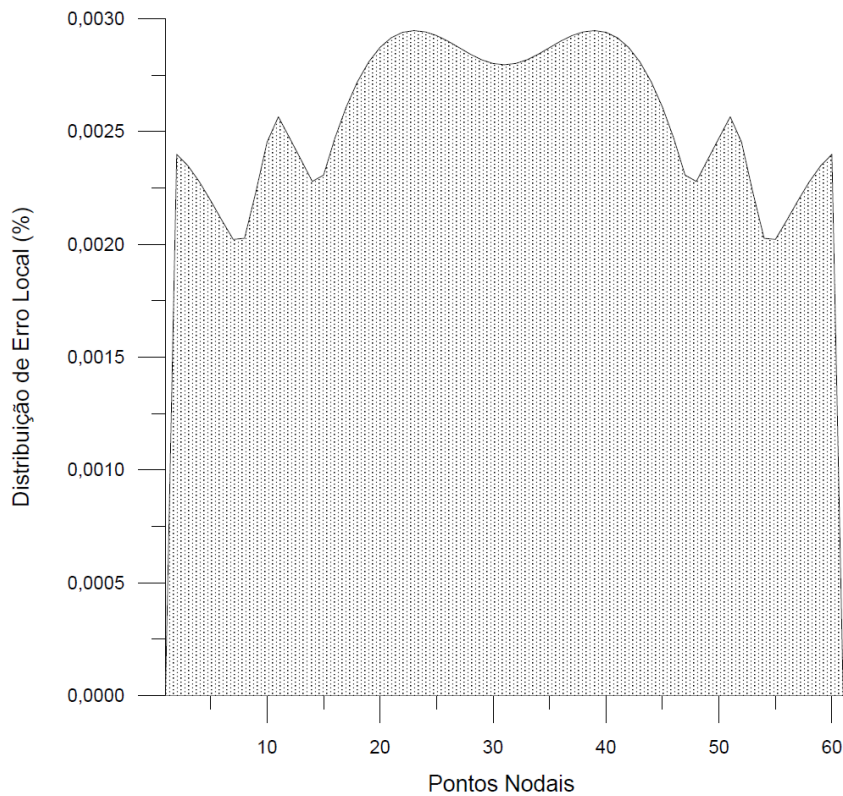
Fonte: Elaborado pelos autores.

Para tentar determinar o fator responsável por esse fenômeno, faz-se uma análise da distribuição espacial do erro ao longo da malha espacial. Com isso, observa-se que os picos de erro ocorrem próximos de onde a curva elástica possui inclinação nula. Desse modo identifica-se uma região crítica na viga, onde o erro apresenta-se muito superior ao restante da estrutura, explicando o fenômeno anteriormente apresentado. O processo de refinamento da malha

espacial consiste em acrescentar pontos discretos na malha equidistante, o que provoca uma variação entre o balanço de pontos dentro e fora da região crítica gerando um ciclo oscilatório, em que o ápice ocorre ao acrescentar pontos dentro dessa região.

Essas distribuições de erro são apresentadas nos quatro gráficos que se seguem, relativos aos quatro conjuntos vinculativos estudados. Nestes observa-se, novamente, que a vinculação AA apresenta os menores erros, tendo o seu pico no centro do vão; já as vinculações EE e EA apresentam picos de erro no engaste e picos secundários próximo ao meio vão, local de inclinação zero também; por fim, como era de se esperar, o conjunto EL possui o maior índice de erro ao longo do vão, tendo seu pico no engaste e sem picos secundários, por não possuir ponto de inclinação zero além do engaste.

Figura 6 – Distribuição de erro na vinculação AA.



Fonte: Elaborado pelos autores.

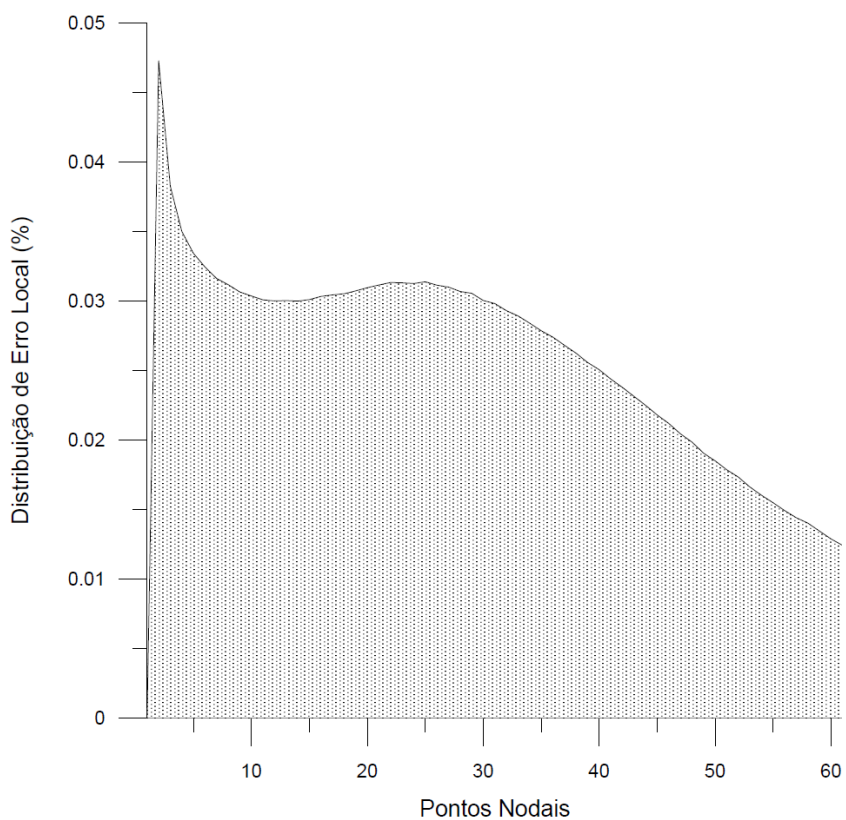


Figura 7 – Distribuição de erro na vinculação EL.

Fonte: Elaborado pelos autores.

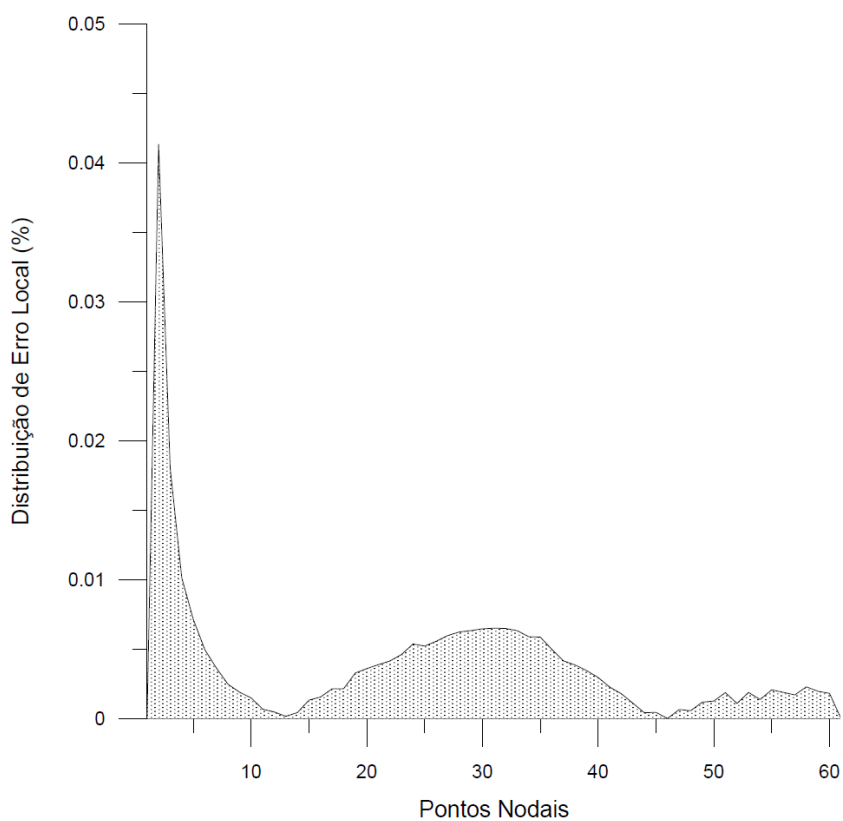


Figura 8 – Distribuição de erro na vinculação EA.

Fonte: Elaborado pelos autores.



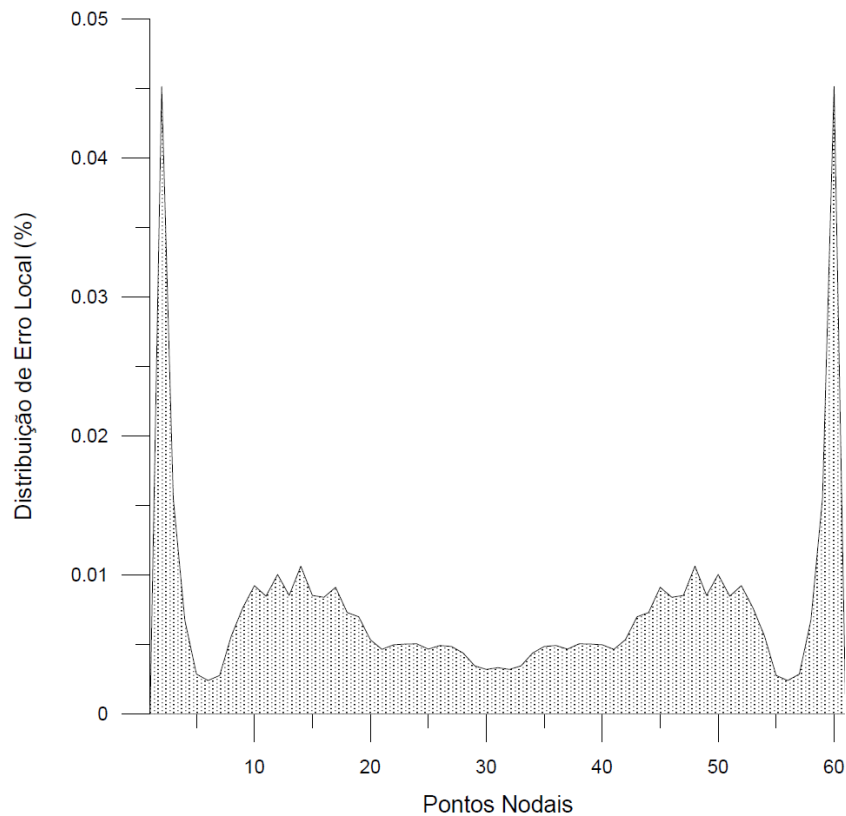


Figura 9 – Distribuição de erro na vinculação EE.

Fonte: Elaborado pelos autores.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se com este estudo que as configurações de vinculação que possuem rigidez maior apresentam precisão inferior quando verificadas em uma malha menos refinada. Além disso, observou-se também que as vinculações que acarretam em uma condição de contorno dependente de derivadas de ordens mais elevadas, apresentam uma maior dificuldade de convergir, por conta de sua complexidade.

Como constatado, esta relação entre as configurações de vinculação e os resultados apresentados não é exclusiva do modelo dinâmico de Euler-Bernoulli e do MDF, porque verifica-se comportamento análogo no modelo estático e em outros modelos matemáticos que governam a deflexão de vigas, assim como em outros métodos numéricos. Portanto, este comportamento é natural à vinculação e não à modelagem matemática ou ao método numérico empregado.

Ademais, por meio da comparação entre o modelo dinâmico e o estático, depreende-se que a flecha média do modelo dinâmico resulta no mesmo valor da flecha estática. Ao se avaliar esta relação, observou-se um comportamento anômalo, entretanto a oscilação apresentada tende a

convergir. Consequentemente, sua descoberta não invalida a relação citada entre os modelos dinâmico e estático, mas sim evidencia um grau de complexidade superior ao esperado.

O estabelecimento de um critério de estabilidade adequado constituiu um dos desafios a serem transpostos, uma vez que há mais de uma abordagem possível, além disso, não é comum na literatura a apresentação do critério para o problema em questão. A distribuição de erros também constituiu uma barreira importante, pois a identificação das regiões críticas identificadas com maiores índices de erro, como coincidentes de pontos de inclinação nula, também não é trivial nem automática.

Com base na experiência adquirida neste estudo, pode-se propor para futuros estudos uma análise mais aprofundada das regiões críticas, avaliando se a presença de outros parâmetros ameniza a oscilação identificada ao se comparar a média da flecha dinâmica com a flecha estática, bem como uma investigação da configuração de vinculação livre-livre, matematicamente possível e relevante para avaliação de certos comportamentos.

## REFERÊNCIAS

BEER, F. P. **Mecânica dos Materiais**. 7. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015. 838 p.

CARRER, J. A. M. et al. **Dynamic Analysis of Timoshenko Beams by the Boundary Element Method**. Science Direct. Engineering Analysis with Boundary Elements. Ed. 37, p. 1602-1616, 2013.

CARRER, J. A. M. et al. Analysis of Euler-Bernoulli And Timoshenko Beams by The Boundary Element Method. In: 10<sup>th</sup> WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 2012, São Paulo.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Transferência de Calor e Massa**. 4. ed. Rio de Janeiro. AMGH Editora, 2012. 295 p.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. Porto Alegre: AMGH, 2011. 809 p.

EULER, L. **De Curvis Elasticis, Additamentum I to his Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes**. Springer Science & Business Media. Lausanne and Geneva, 1744.

FRANCO, B. C.; CHONG, W. Análise Dinâmica de uma Viga de Euler-Bernoulli Submetida a Impacto no Centro após Queda Livre do Método de Diferenças Finitas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, São Paulo. Vol. 4, N. 1, 2016.

GHOLAMPOUR, M. et al. Stress-Based Finite Element Methods for Dynamics Analysis of Euler-Bernoulli Beams with Various Boundary Conditions. **Latin American Journal of Solids and Structures**. Scielo. Ed. 14, p. 1629-1647, 2017.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB.** Porto Alegre: Bookman, 2008. 479 p.

HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories. **Journal of Sound and Vibration, Piscataway**, Science Direct. p.935-988, mar. 1999.

HEYLIGER, P. R.; REDDY, J. N. A Higher Order Beam Finite Element For Bending And Vibration Problems. **Journal of Sound and Vibration, Piscataway**. Science Direct. p.309-326, april 1988.

OZISIK, Necati. **Finite difference methods in heat transfer.** Florida. CRC press, 1994.

PROKIĆ, A.; BEŠEVIC, M.; LUKIĆ, D. A Numerical Method for Free Vibration Analysis of Beams. **Latin American Journal of Solids and Structures**. Scielo. Ed. 11, p. 1432-1444, 2014.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas.** 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014. 424 p.

SCUCIATO, R. F; CARRER, J. A. M. Análise Dinâmica de Vigas de Euler-Bernoulli pelo Método dos Elementos de Contorno utilizando Soluções Fundamentais Dependentes do Tempo. In: Proceedings of the XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, 2013, Pirenópolis, GO. Anais de Congresso. Nov 10-13, 2013.

SCUCIATO, R. F.; CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. Dynamic Analysis of Euler-Bernoulli Beams by The Time-Dependent Boundary Element Method Formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. Science Direct. Ed. 63, p. 134-153, 2016.

TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering.** New York. 2° Ed, jul. 1937.