

---

## O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E DA ENGENHARIA DIDÁTICA: REVISÃO INTEGRATIVA

---

**FRANCISCO MATEUS AZEVEDO PINTO**

Universidade do Porto  
mtsزد@gmail.com

**CARLA PATRÍCIA SOUZA RODRIGUES PINHEIRO**

Universidade Federal do Ceará  
carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br

**DANIEL BRANDÃO MENEZES**

Universidade Estadual do Ceará  
brandaomenezes@hotmail.com

### RESUMO

O ensino da sequência de recorrência definida por Ernst Erich Jacobsthal se mostra viável para o ensino ao utilizar os preceitos definidos pela Teoria das Situações Didáticas, constatando-se por meio da observação na aplicação das fases da metodologia Engenharia Didática, definidas em trabalhos científicos analisados utilizando a metodologia Revisão Integrativa. O objetivo deste manuscrito é identificar na literatura científica aspectos sobre o uso da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da sequência de Jacobsthal sob a perspectiva da Engenharia Didática. Assim, foi realizada uma revisão integrativa da literatura entre setembro de 2021 a fevereiro de 2022, empregando como descritores: Teoria das Situações didáticas, Engenharia Didática e Sequência de Jacobsthal. Com isso, foi adotada a estratégia PICO, nos quais relacionam: população de alunos de graduação; intervenção no Ensino da Sequência de Jacobsthal; Controle não se aplica e Outcome com a utilização da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Sequência de Jacobsthal. Como resultado do estudo em questão, deleita-se uma discussão a respeito do conhecimento científico presente nos trabalhos selecionados que possibilita o ensino da Sequência de Jacobsthal usando a teoria supracitada, unida à metodologia de pesquisa proposta. Conclui-se que os achados teóricos trazem aspectos importantes para aplicação das fases da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Sequência de Jacobsthal desde a generalização desta sequência até aplicações e situações problemas que podem ser contextualizadas e empregadas na experimentação em sala de aula.

### PALAVRAS-CHAVE:

Ensino, Sequência de Recorrência, Ensino de Matemática, Metodologia de Pesquisa, Revisão.

---

---

**O ENSINO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL SOB A PERSPECTIVA DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E DA ENGENHARIA DIDÁTICA: REVISÃO INTEGRATIVA**

---

**ABSTRACT:**

The teaching of the recurrence sequence defined by Ernst Erich Jacobsthal proves to be viable for teaching when using the precepts defined by the Theory of Didactic Situations, verifying through observation in the application of the phases of the Didactic Engineering methodology, defined in scientific works analyzed using the Integrative Review methodology. The objective of this manuscript is to identify in the scientific literature aspects about the use of the Theory of Didactic Situations for teaching the Jacobsthal sequence from the perspective of Didactic Engineering. Thus, an integrative literature review was carried out between September 2021 and February 2022, using as descriptors: Theory of Didactic Situations, Didactic Engineering and Jacobsthal Sequence. With this, the PICO strategy was adopted, in which they relate: undergraduate student population; intervention in Jacobsthal's Sequence Teaching; Control does not apply and Outcome with the use of the Theory of Didactic Situations for teaching the Jacobsthal Sequence. As a result of the study in question, a discussion about the scientific knowledge present in the selected works that enables the teaching of the Jacobsthal Sequence using the aforementioned theory, together with the proposed research methodology, is delighted. It is concluded that the theoretical findings bring important aspects for the application of the phases of the Theory of Didactic Situations for teaching the Jacobsthal Sequence from the generalization of this sequence to applications and problem situations that can be contextualized and used in experimentation in the classroom.

**KEYWORDS:**

Teaching. Recurrence Sequence. Mathematics Teaching. Research Methodology. Review.

## 1. INTRODUÇÃO

Com base na sequência de Fibonacci<sup>1</sup>, surgem diversas sequências numéricas que não são muito exploradas no âmbito da História da Matemática. Segundo Alves (2016), essas sequências começam a ser evidenciadas por meio de matemáticos do mundo inteiro que tinham um propósito de fornecer novos modelos generalizados. Dessa maneira, escolhemos a sequência de Jacobsthal como objeto de pesquisa, pois observou-se com a pesquisa bibliográfica, que será evidenciada no decorrer deste trabalho, que o seu estudo, quando atrelada à docência, foi descrita pela grande maioria dos autores por meio de uma teoria de ensino e uma metodologia de pesquisa específica, sendo uma de pesquisa em sala de aula e outra que busca evidenciar uma proposta metodológica também no ambiente de ensino, são elas: Engenharia Didática e a Teoria das situações Didáticas.

Diante disso, é imprescindível a explanação teórica a fim de melhor informar e situar o leitor da presente revisão. Deste modo, evidencia-se como pergunta norteadora desta pesquisa o seguinte questionamento: Como é possível utilizar os achados teóricos presentes nos trabalhos selecionados por meio de uma Revisão Integrativa para evidenciar a importância da Teoria das Situações Didáticas para o aperfeiçoamento do ensino da sequência de Jacobsthal com um olhar por meio da metodologia de pesquisa Engenharia Didática?

Para responder tal questionamento, delimitamos o objetivo deste trabalho que é o de identificar na literatura selecionada a produção científica sobre o uso da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da Sequência de Jacobsthal com um olhar por meio da metodologia de pesquisa Engenharia Didática.

Para alcançar esse objetivo foi realizada como metodologia uma revisão integrativa utilizando as seguintes bases de dados: *Scientific Electronic Library Online* (SciELO), *Education Resources Information Center* (ERIC), Google Acadêmico, CAPES Periódicos e Biblioteca Digital

---

<sup>1</sup>A sequência de Fibonacci é uma das mais importantes sequências que são estudadas no mundo. Pesquisadores atraídos por seu aspecto enigmático procuram estudá-la desde sua origem, que ocorreu na observação do problema conhecido como a reprodução infinita de coelhos até as consequências dela na contemporaneidade (SOUZA, 2018).

Brasileira de Teses e Dissertações (BDBTD), empregando os descritores e palavras-chaves: Teoria das Situações didáticas, Engenharia Didática, Sequência de Jacobsthal, manuseando o operador Booleano *AND*<sup>2</sup>.

Isto posto, especulamos inicialmente como hipótese que os manuscritos estudados trazem consigo a bagagem necessária para o ensino da sequência de Jacobsthal utilizando a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), por meio de uma investigação utilizando os pressupostos da Engenharia Didática.

Nas seções seguintes, apresentamos a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas com as suas respectivas dialéticas. Em seguida, a revisão investigativa, com discussões e resultados e considerações finais.

## 2.REFERENCIAL TEÓRICO

Neste tópico serão apresentadas as teorias que se caracterizam nesta pesquisa como os objetos de investigação para o alcance do objetivo defendido. Apresentar-se-ão também, as principais referências das ideias defendidas na Engenharia Didática, na Teoria das Situações Didática e uma caracterização da Sequência de Jacobsthal.

### 2.1. ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática produz uma estruturação de um quadro teórico sendo capaz de criar situações didáticas, norteando um referencial metodológico para análise das práticas e dos fenômenos de ensino investigados. Essa metodologia, segundo Almouloud (2007, p. 171), pode *“ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito”*.

---

<sup>2</sup> A saber, os operadores Booleanos são utilizados para especificar o algoritmo de busca e os termos que devem ser pesquisados e as relações entre esses, ou seja, eles “atuam como palavras que informam ao sistema de busca como combinar os termos de sua pesquisa. São eles: AND, OR e NOT e significam, respectivamente, E, OU e NÃO e, a fim de facilitar a visualização da busca, é importante que estes sejam escritos em letras maiúsculas. O operador booleano AND funciona como a palavra “E”, fornecendo a intercessão, ou seja, mostra apenas artigos que contenham todas as palavras-chave digitadas, restringindo a amplitude da pesquisa. “(Copyright, 2018).

Nesta perspectiva, a Engenharia Didática deve ser utilizada com intuito investigativo, a fim de angariar achados que beneficiem o ensino e a aprendizagem de determinado conteúdo.

Evidencia-se que

o termo da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos. (DOUADY, 1995, p. 62)

Infere-se da passagem acima que a Engenharia Didática simula o trabalho de um engenheiro e por isso é dividida em etapas bem sequenciadas e definidas como: análises preliminares, análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação.

Análises preliminares, são investigações iniciais que buscam enquadrar e analisar as vertentes atuais do ensino de determinado conteúdo em foco na pesquisa, que pode comportar as seguintes vertentes:

- epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- do ensino usual e seus efeitos;
- das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução;
- das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva;
- a consideração dos objetivos específicos da pesquisa;
- o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho. (ALMOULOUD. *et al.* 2008, p. 65)

Na Análise *a priori*, segundo Artigue (1988), essa fase diferencia dois tipos de variáveis que serão analisadas pelo pesquisador em série, as variáveis macro didáticas ou globais que estão vinculadas a organizações e definições globais em volta do campo de estudo, a aprendizagem e ensino do saber em pesquisa e as variáveis micro didáticas ou locais que fazem referências as organizações locais e mais específicas do ambiente de ensino. Nesta etapa, o pesquisador deve levar em consideração os seguintes pontos:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação didática desenvolvida;

- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOUD *et al*, 2008, p. 65)

Já na fase da experimentação é o momento da aplicação, coleta de dados e observações no espaço da pesquisa, ou seja, é neste momento que o pesquisador em sala de aula vai “colocar em funcionamento todo o dispositivo construído, corrigindo-o se necessário, quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificam essa necessidade [...]” (ALMOULOUD, *et al*. 2008, p. 67-68).

A etapa anterior é prosseguida da análise a posteriori e validação que é caracterizada pela análise dos dados obtidos na experimentação e confrontados com os dados evidenciados na análise *a priori* para que se confirme ou negue as hipóteses levantadas de acordo com as variáveis em questão.

## 2.2. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) por sua vez, está voltada para o desenvolvimento e a possibilidade de uma situação em sala de aula que relacione de forma didática o professor, o aluno e o saber e tem como objetivo evidenciar momentos específicos para que o aluno e professor possam se relacionar, e através de estímulos que partem do docente, desenvolver o conhecimento. Sobre essas relações didáticas estabelecidas ressalta-se que:

[...] devem ser concebidas de maneira a provocar o aparecimento dos conhecimentos que os alunos trazem, em respostas, espontâneas ou não, e em condições apropriadas. Elas devem ser, porém, sem nenhuma relação visível para o aluno, com uma intenção didática desejada e sem qualquer intenção complementar. (BROUSSEAU apud TEIXEIRA & PASSOS, 2013, p.162)

Deste modo Brousseau (1986) produziu uma tipologia de situações didáticas voltadas para atividades que buscam desenvolver o aprendizado de matemática com as dialéticas da devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

Na situação de devolução, ao apresentar uma situação problema, o professor passa a responsabilidade da construção do saber para o aluno, assim, descartando qualquer tipo de saber entregue pronto e mostra que o aluno deverá construir por si só o conhecimento em jogo. O docente, neste momento, *“cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, incluindo-o no jogo e assumindo os riscos por tal ato”* (TEIXEIRA & PASSOS, 2013, p. 165).

Na situação de ação, o aluno de posse da situação problema apresentada pelo professor, começa a tomar decisões e praticar ações com o intuito de resolver o problema, ou seja, neste momento *“o conhecimento do assunto se manifesta apenas por decisões, por ações regulares e eficazes no meio [...]”* (SOUSA et al, 2020, p. 176).

Na situação de formulação, o estudante através de uma linguagem informal, ou seja, sem obrigatoriamente usar uma linguagem matemática formal, deve descrever uma possível resolução para o problema. Esta resolução pode ou não ser eficiente e conter até mesmo *“ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; [...]”* (TEIXEIRA & PASSOS, 2013, p. 165).

A situação de validação é caracterizada pela tentativa de convencimento dos interlocutores da veracidade das etapas de resolução da questão proposta. *“Neste ponto, já se deve utilizar uma linguagem mais formalizada e mecanismos de prova”* (ALVES, 2017, p. 453).

Por fim, na situação de institucionalização, a intenção do professor é revelada e o conteúdo matemático que envolve a situação problema proposta é sistematizado e apresentado pelo professor, a fim de desenvolver uma generalização. É caracterizada pela *“passagem do conhecimento do seu papel de resolução de uma situação de ação, formulação ou prova, para um novo papel, o de referência [...]”* (SOUSA. et al, 2020, p. 176).

### 2.3. SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL

Neste contexto, diversos pesquisadores têm se engajado no estudo e análise de diversas sequências recursivas. Neste estudo, os autores lançarão o olhar para a sequência de Jacobsthal que faz referência a Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), especialista em Teoria dos Números e ex-aluno de Ferdinand G. Frobenius. O seu trabalho foi referência para a descrição de várias sequências recorrentes de segunda ordem, como é evidenciado do trecho abaixo:

Como no caso da sequência de Fibonacci, sequência Lucas, sequência Pell, sequência de Padovan, sequência de Perrin, Sequência de Mersenne, sequência de Narayana, encontramos uma herança enorme e variada de modelos, propriedades, teoremas e Implicações recentes para outros ramos especiais em Matemática, derivado do trabalho de Jacobsthal e, em particular, o processo de generalização da sequência Jacobsthal (ALVES, 2018, p. 30).

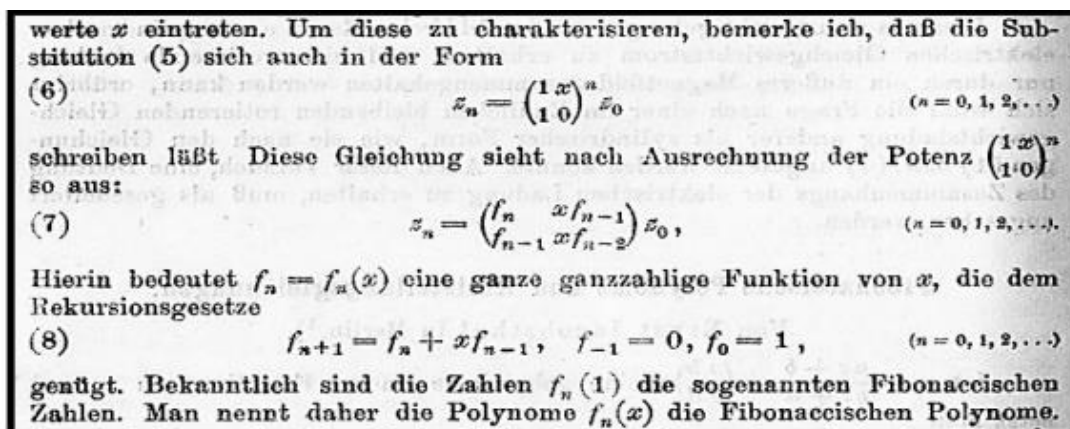
Como explanado acima, a sequência de Jacobsthal traz uma relevante importância nos aspectos históricos e evolutivos do ensino de sequências recorrentes de segunda ordem. Por outro lado, percebe-se que no Brasil são poucos os trabalhos que discutem e abordam sistematicamente o ensino da sequência de Jacobsthal, fato que será comprovado no decorrer desta revisão.

Sendo um dos objetos de análise deste trabalho, vale desenvolver aspectos referentes a sequência de Jacobsthal, que definimos:  $\{ \{ J_n \}, n \in \mathbb{N} \}$ , que por sua vez é representada pela seguinte função de recorrência  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  que possui como condições iniciais  $J_0 = 0$ ,  $J_1 = 1$ . Logo pode-se descrever o seguinte conjunto  $\{ J_n \}: \{ 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \dots \}$ .

Neste contexto, os autores deste artigo trazem abaixo um trecho retirado do livro de Ernst Jacobsthal (1882-1965), com o intuito de evidenciar e justificar as proposições e aspectos matemáticos descritos acima. Jacobsthal (1919 - 1920) descreve os primeiros valores numéricos para a sequência, (para  $x = 2$ ).

#### Figura 1: Forma matricial para a Sequência de Jacobsthal





Fonte: (Alves, 2018. p. 31)

Na Figura 1 o uso de representações matriciais e a descrição de uma sequência recorrente, que quando admite  $x = 1$  desenvolve-se a sequência de Fibonacci e, quando  $x = 2$ , emerge a sequência de Jacobsthal.

A relação de recorrência da sequência de Jacobsthal deve ser apresentada de forma epistemológica, além de explorar seu aspecto histórico. Essa preocupação também se estende para formação inicial de professores, sendo uma importante aplicação para a sequência de recorrência estudada por este manuscrito e a matricial (Figura 1).

Segundo Alves (2017), aspectos tecnológicos para o ensino e abstração desta possibilidade são de grande importância, assim como fornecer aos estudantes exemplos particulares de determinada aplicação para instigar a produção de fórmulas para matrizes e ressalta ainda que esta etapa corresponde as fases de ação e formulação, previstas pela Teoria das Situações Didáticas.

A fim de resumir seus achados, Alves (2017) expõe a tabela a seguir como forma de sistematizar as informações supracitadas:

**Tabela 1: Quadro resumido de fórmulas derivadas da Sequência Generalizada de Jacobsthal**

| Fórmulas e identidades                | s-Sequência Generalizada de Jacobsthal  | (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal  |
|---------------------------------------|---|---|
| Relação de recorrência                | $J_{n+1}^s = s \cdot J_n^s + (-1)^n$<br>(ANATASSOV, 2011)   | $J_{n+1}^{s,t} = s \cdot J_n^{s,t} + (-t)^n, n \geq 0.$<br>(ANATASSOV, 2011)  |
| Extensão ao campo de índices inteiros | $J_{-n}^s = \frac{(-1)^{n+1}}{s^n} \cdot J_n^s, n \geq 0$   | $J_{-n}^{s,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(st)^n} \cdot J_n^{s,t}, n \geq 0$  |
| Matrizes de representação             | $F_s = \begin{pmatrix} s-1 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s \geq 2.$   | $F_{s,t} = \begin{pmatrix} s-t & s \cdot 1 \\ t \cdot 1 & st \cdot 0 \end{pmatrix}, s, t \geq 2.$   |
| Potências com expoentes positivos     | $F_s^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^s & s \cdot J_n^s \\ J_n^s & s \cdot J_{n-1}^s \end{pmatrix}, n \geq 2.$ | $F_{s,t}^n = \begin{pmatrix} J_{n+1}^{s,t} & s \cdot J_n^{s,t} \\ t \cdot J_n^{s,t} & (s \cdot t) \cdot J_{n-1}^{s,t} \end{pmatrix}, n \geq 2.$ |

Fonte: (Alves, 2017. p. 103)

Para Alves (2018), a Figura 2 apresenta situações problemas que ajudam a balizar uma transposição didática do conteúdo matemático que muitas vezes podem ser encontrados em artigos científicos de matemática pura (BERGUM *et al*, 1985; CERIN, 2007a; 2007b; COOK; BACON, 2013; DJORJEVIC, 2000; FREY; SELLERS, 2000; HORADAM, 1996).

Para uma melhor visualização do leitor deste manuscrito, a respeito da afirmação, foi realizado um “*print screen*”, ou seja, uma captura de tela, do problema proposto por Alves (2018, p. 47) que evidencia uma das situações problemas descritos por ele, conforme a Figura 2.

**Figura 2: Situação Problema III**

Situação problema III: A partir da relação de recorrência estudada por Erns Jacobsthal, definida por  $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, n \geq 2$ , e valores iniciais  $J_0 = 0, J_1 = 1$ , podemos facilmente determinar a expressão explícita para os termos da sequência acima, indicada por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fonte: (ALVES, 2018. p. 47)

Observando a Figura 2, percebe-se que a relação busca trabalhar os termos explícitos da

sequência em estudo, assim podendo ser aplicada sua resolução e estudo nas fases da Teoria das Situações Didáticas. Conforme Alves (2018, pp. 47-48) relata na resolução dessa situação problema III (Figura 3), faremos um breve resumo de como as fases da Teoria das Situações Didática podem ser aplicadas. Na fase da ação, os estudantes devem analisar a situação problema, podendo tomar a decisão de aplicar a relação de recorrência.

Na fase da formulação, a partir dessa tomada de decisão, tem-se um quociente  $t_n = \frac{J_n}{J_{n-1}}$ , em seguida aplica-se o limite tendendo ao infinito, encontrando a equação  $J^2 - J - 2 = 0$ .

Para a validação, aplica-se as raízes encontradas no termo geral, previsto na Teoria das Equações homogêneas recorrentes lineares descrita como  $J_n = a_1 2^n + a_2 (-1)^n$ , considerando  $n$  igual a 0 e 1, e admitindo os valores iniciais da sequência de Jacobsthal como  $J_0 = 0, J_1 = 1$ . Assim, gera um sistema linear de duas incógnita cuja os resultados são  $1/3$  e  $-1/3$ , finalizando a prova.

Para a última fase, todos os argumentos utilizados nas fases anteriores são discursões de artigos científicos de Matemática Pura ou Aplicada, numa perspectiva da sequência original de Jacobsthal. Logo, a fase denominada institucionalização é conduzida pelo professor, com o intuito de promover a compreensão da evolução da teoria e de modelos matemáticos formais.

Desta maneira, as explanações teóricas dos saberes colocados em questão por este manuscrito foram desenvolvidas acima e trazem o intuito de exemplificar, situar e esclarecer o leitor que a partir deste ponto debruça-se sobre uma revisão integrativa dos manuscritos existentes na literatura científica que utilizaram a Engenharia Didática como metodologia para desenvolver pesquisas a respeito do ensino da sequência de Jacobsthal com o amparo da Teoria das Situações Didáticas.

Diante dessas informações, o conhecimento proposto pela sequência recorrente de segunda ordem de Jacobsthal traz uma evidente aplicabilidade em vários conteúdos presentes nas grades curriculares tanto do ensino básico como do ensino superior, entretanto seu ensino ainda é feito de forma simplificada e direta, sem um preciso aprofundamento teórico e prático, uma vez que o lócus teórico na literatura *“geralmente enfatiza propriedades eminentemente básicas, pitorescas, contistas e triviais relacionadas a esta sequência”* (ALVES. et al, 2018, p. 30).

### 3. METODOLOGIA

O presente trabalho trata-se de uma revisão integrativa que utilizou as etapas propostas por Mendes, Silveira & Galvão (2008): definição da pergunta de Pesquisa, Pesquisa Bibliográfica, Categorização dos Estudos, Análise dos Manuscritos, Interpretação dos Achados, Apresentação da Revisão Integrativa de Literatura. Uma vez que tal metodologia de pesquisa permite:

[...] a inclusão de estudos experimentais e não-experimentais para uma compreensão completa do fenômeno analisado. Combina também dados da literatura teórica e empírica, além de incorporar um vasto leque de propósitos: definição de conceitos, revisão de teorias e evidências, e análise de problemas metodológicos de um tópico particular (SOUZA,2010, p. 103).

Para a pesquisa bibliográfica concentrou-se na catalogação de manuscritos nas seguintes bases de dados e bases de referências: *Scientific Electronic Library Online* (SciELO), Education Resources Information Center (ERIC), Google Acadêmico, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES), Periódicos e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDBTD), usando os descritores Teoria das Situações Didáticas, Engenharia Didática, Sequência de Jacobsthal, assim como o auxílio do operador booleano “AND”.

A estratégia PICO foi utilizada da seguinte forma, P – População com os alunos de graduação; I - Intervenção no ensino da sequência de Jacobsthal; C - Controle se houver: nessa pesquisa não se aplica; O – Outcome a utilização da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da sequência de Jacobsthal. Assim, segue na Tabela 2, um resumo dos descritores coletados durante a pesquisa.

**Tabela 2: Resumo dos Descritores**

| DESCRITORES |
|-------------|
|-------------|

|   |   |
|---|---|
| P | Estudantes de graduação   |
| I | Intervenção no ensino da sequência de Jacobsthal                                      |
| C | Não se aplica   |
| O | Utilização da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da sequência de Jacobsthal |

**Fonte: elaborada pelos autores**

As pesquisas foram realizadas no período de setembro de 2021 a fevereiro de 2022 e os critérios de inclusão dos dados foram: manuscritos com até cinco anos de publicação, artigos que possuíam em seu corpo textual termos como "Teoria das Situações Didáticas", "Sequência de Jacobsthal", "Engenharia Didática e "Ensino da sequência de Jacobsthal", texto completo, texto em português, inglês e espanhol. Como critérios de exclusão: Textos incompletos, fora do recorte temporal, textos que não abordavam diretamente a temática vigente e textos repetidos nas bases de pesquisa.

No final da pesquisa, foram encontrados um total de trinta e sete artigos. Ao comparar esses trabalhos, pode-se perceber que oito artigos se repetiam entre os achados. Após a leitura dos oito artigos selecionados foram inclusos, mediante os critérios supracitados, apenas quatro que irão compor o estudo. Dessa maneira, a Tabela 3 mostra a distribuição dos artigos selecionados durante a pesquisa de acordo com as bases de dados utilizadas.

**Tabela 3: Distribuição dos artigos selecionados**

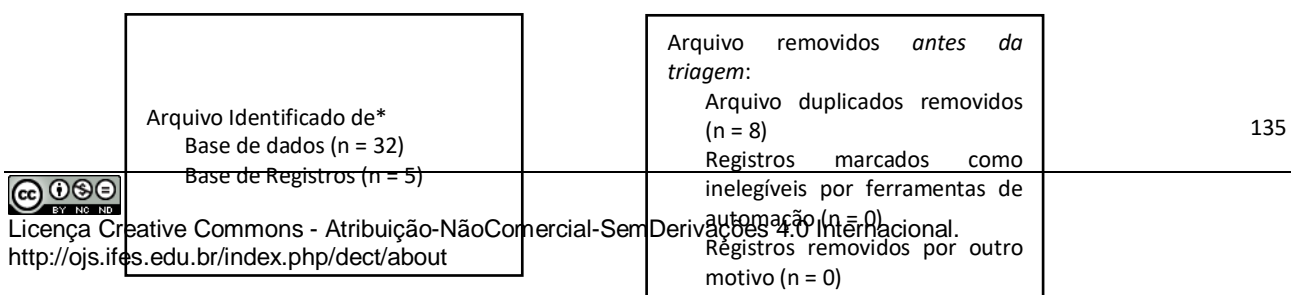
| BASES DE DADOS | Nº | % |
|----------------|----|---|
|----------------|----|---|

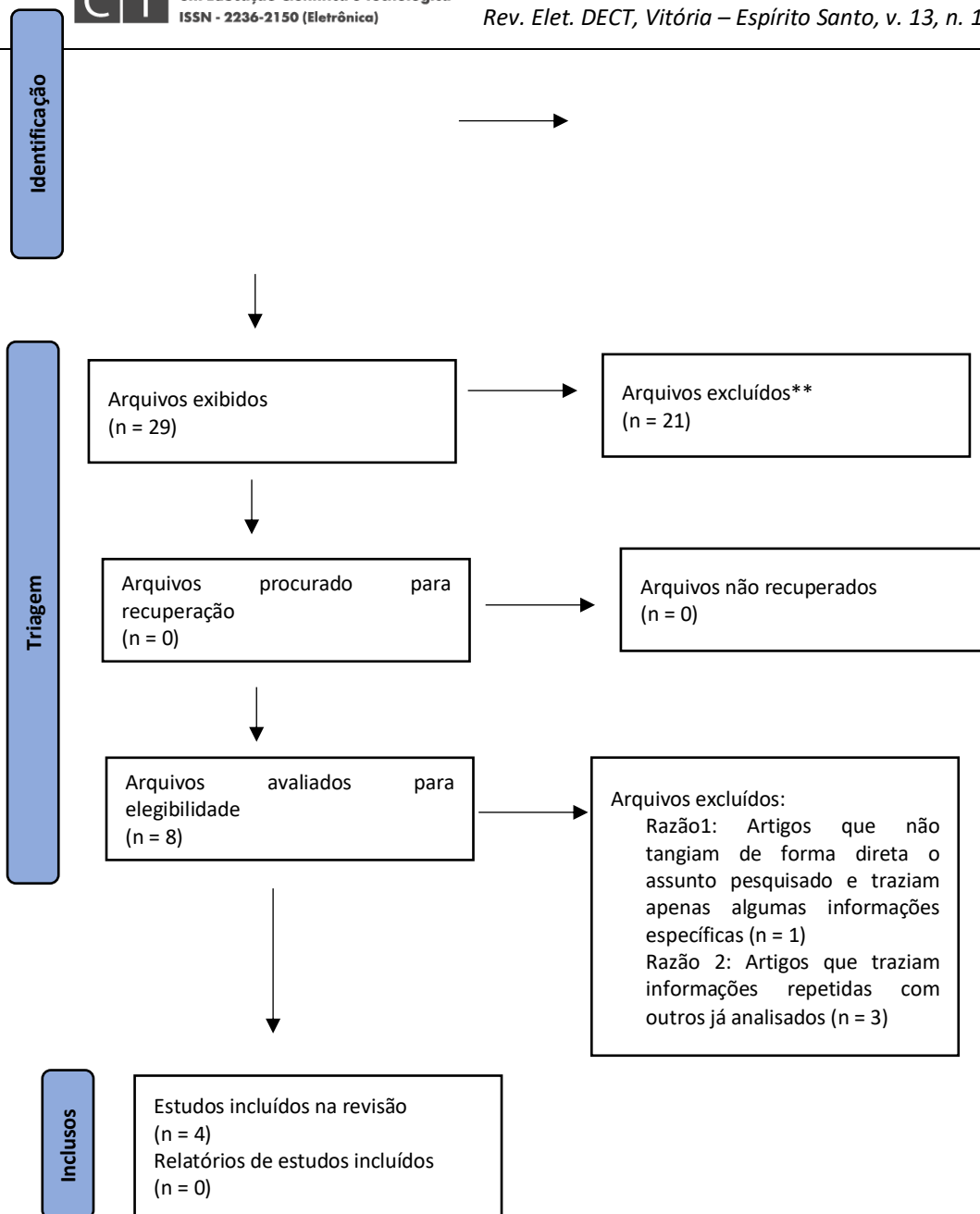
|                  |    |        |
|------------------|----|--------|
| SciELO           | 0  | 0      |
| ERIC             | 0  | 0      |
| Google Acadêmico | 32 | 86,487 |
| CAPES            | 5  | 13,514 |
| BDT              | 0  | 0      |
| TOTAL            | 37 | 100    |

**Fonte: Elaborada pelos autores**

Deste modo, apresenta-se abaixo com a Figura 3, o diagrama de fluxo do tipo PRISMA (2020), que mostra a consolidação na construção da amostra de artigos angariados com a presente Revisão Interativa. Assim como, o processo de pesquisa, catalogação e seleção dos artigos que compõem essa pesquisa.

**Figura 3: Diagrama de fluxo PRISMA 2020 para composição de amostra final de artigos revisados**





Fonte: Prisma, 2020

A partir da Figura 3, a análise dos artigos incluídos se deu mediante, inicialmente, a leitura de seus resumos, assim identificando as principais informações presentes em cada um deles, posteriormente foram feitas leituras na íntegra do corpo textual dos manuscritos assim como fichamentos que ajudaram a permear as discussões abordadas nessa Revisão Integrativa de Literatura.

Em seguida, foi realizada a síntese do conhecimento produzido sobre o ensino da sequência de Jacobsthal mediante a Teorias das Situações Didáticas. Como estratégias complementares incluíram-se a pesquisa de estudos relevantes nas citações dos artigos elegíveis para triagem.

Isto posto, nos tópicos vindouros, os autores farão observações encontradas nos artigos selecionados para o estudo a fim de trazer interpretações dos dados colhidos e suas contribuições para o ensino da sequência de Jacobsthal por meio da Teoria da Situações Didáticas, assim como a apresentação da Revisão Integrativa de Literatura desenvolvida neste artigo..

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Engenharia Didática (ED) é uma metodologia de pesquisa que em sua fase de experimentação estabelece uma relação com a Teoria das Situações Didáticas, uma vez que essas atuam como mecanismos voltados para o ensino de conceitos matemáticos e suas etapas estritamente definidas buscam a obtenção de uma transposição didática eficiente de um conteúdo científico (Alves, 2017), neste caso a sequência de Jacobsthal.

A análise *a priori*, segundo Souza (2021), possibilita a obtenção e elaboração de situações problemas por meio de variáveis didáticas observadas nesta etapa e a partir disso pode ser apresentado situações problemas para os alunos em sala de aula com o intuito de estimular a criação de inferências matemáticas e assim evidenciar relações e propriedades da sequência de Jacobsthal.

Assim, para aplicação dessas situações problemas, na fase de experimentação proveniente da E.D (Engenharia Didática), utilizando-se as etapas da Teoria das Situações Didáticas, ação, formulação, validação e institucionalização, proporcionam uma visão mais profunda dos aspectos matemáticos intrínsecos na sequência em questão.

Já na análise *a posteriori*, esses resultados obtidos na fase anterior, são confrontados com a análise *a priori*, sendo validados de forma interna, por meio do comportamento dos estudantes durante todo o processo, assim como suas hipóteses na tentativa de resolução da situação problema exposta.



Deste modo, a presente revisão integrativa se debruçou em 4 produções científicas a fim de identificar suas nuances a respeito do Ensino da Sequência de Jacobsthal por meio da Teoria das Situações Didáticas. Assim, abaixo serão evidenciados os trabalhos selecionados, assim como seus objetivos e resultados.

Para constatar os contribuições da teoria de ensino e da metodologia utilizada inicialmente foram identificados trinta e sete artigos, que com a aplicação de critérios de inclusão e exclusão resultaram em oito artigos. Destes oito artigos restantes, um tratava da história da sequência de Jacobsthal e seus preceitos algébricos com comparações as demais sequência de recorrência, sem apresentar uma explanação sobre o ensino deste tópico vinculado a Teoria das Situações Didáticas e três desses abordam a temática proposta de formas bem semelhantes, deste modo restaram, após a triagem, quatro artigos que foram inclusos na presente Revisão Integrativa de Literatura (RIL).

Assim, foi elaborado o Quadro 3, com a descrição das revistas, autores, títulos, objetivos e resultados dos artigos selecionados de acordo com os critérios já citados anteriormente.

**Tabela 4: Distribuição dos artigos selecionados**

| REVISTA                                    | AUTOR(ES)   | TÍTULO(N)  | OBJETIVO(S)   | RESULTADO   |
|--|---|--|---|---|
| Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista | ALVES, Francisco Regis Vieira. CATARINO, Paula Maria. 2018. | (1) ENGENHARIA DIDÁTICA DE 2ª GERAÇÃO COM O TEMA: $h(x)$ -POLINÔMIOS DE JACOBSTHAL | Apresentar roteiros de ensino e transposição didática, visando suscitar orientações e um viés de exploração no ensino acadêmico para determinadas propriedades da SPJ [...] e indicar alguns conteúdos para o aperfeiçoamento no ensino acadêmico, no âmbito do contexto histórico, matemático e epistemológico. (Adaptado) | “[...]as situações problemas apresentadas, com o balizamento da TSD, devem permitir um roteiro para uma transposição didática do professor que atua no lócus acadêmico, e, de modo particular, para uma ação no contexto da investigação em História da Matemática. [...] Não obstante, a despeito da importância incontestada do componente histórico, o professor não pode descuidar, ainda, de veicular, transmitir em sua sala de aula, informações acerca do estágio atual |

|  |                                      |  |  |  |
|--|--------------------------------------|--|--|--|
|  |                                      |  |  | e hodierno deles. Tal ponto de vista fortalece a compreensão sobre um processo evolutivo ininterrupto e contíguo da Matemática. E, em nosso caso, com o amparo de uma ED2, teremos uma trajetória definida para o ensino das $h(x)$ -funções polinomiais de Jacobsthal.”   |
| INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ – IFCE PRÓ – REITORIA DE PESQUISA, PÓS – GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECEM | SOUZA, Thamires Silva Aquino de.2020 | (2) SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE JACOBSTHAL: UMA ENGENHARIA DIDÁTICA SOBRE SEU ENSINO | “Desenvolver uma Engenharia Didática de 1ª geração, envolvendo a noção de sequência generalizada de Jacobsthal, visando à compreensão do seu processo histórico-matemático evolutivo”<br>“Discutir o processo matemático, epistemológico e histórico-evolutivo dos modelos de generalização da sequência de Jacobsthal; conceber situações didáticas de ensino para a noção de SGJ e por último pretende-se Aplicar a TSD na organização de atividades deste tópico que possam promover a formulações de demonstrações e definições no contexto da formação de professores de matemática.” | “[...]a sequência estendida no campo dos inteiros, propriedades e generalidades matriciais e as relações recorrentes n-dimensionais, que revelam seu contínuo processo de desenvolvimento matemático. Tais fatos oportunizaram a obtenção do primeiro objetivo específico.”<br>“Proseguindo, a fase de análises <i>a priori</i> viabilizou a análise de variáveis didáticas para a elaboração de situações de ensino, que propõem apresentar propostas de problemas que podem ser replicadas em sala que possam permitir ao estudante o desenvolvimento do seu raciocínio inferencial, por meio da formulação e identificação de definições, teoremas e propriedades atinentes à SJ. Isso evidencia que o segundo objetivo específico foi atingido.” |

|  |   |   |  |  |
|--|---|---|--|--|
| Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia.        | SOUZA, Thamires Silva Aquino de. ALVES, Francisco Regis Vieira. 2021. | (3) ENGENHARIA DIDÁTICA COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO NO ESTUDO E NO ENSINO DA SEQUÊNCIA DE JACOBSTHAL  | “[...] tecer discussões sobre alguns modelos de generalização e extensão da Sequência de Jacobsthal. Assim, em consonância com as orientações da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e em complementariedade com a Teoria das Situações Didáticas, [...]”   | “[...]as fases de análises preliminares e análises <i>a priori</i> da ED, possibilitaram a demarcação de aspectos de ordem epistemológica, didática e cognitiva, bem como a análise de variáveis didáticas para a elaboração de situações de ensino, que propõem apresentar propostas de problemas que podem ser replicadas em sala de aula (ALVES; ALVES DIAS, 2017).”                              |
| UNIÒN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. | ALVES, Francisco Regis Vieira. 2017.                                  | (4) Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s, t) -Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e <i>a priori</i> | “(a) Descrever propriedades matriciais relacionadas com as sequências s-SGJ e (s, t) - SGJ que refletem um caráter evolutivo epistemológico cuja herança pode ser identificada nos trabalhos de Anatassov (2011; 2012); (b) Conceber situações problema envolvendo propriedades discutidas, de modo restritivo, apenas em periódicos de Matemática Pura ou Aplicada; | “[...] as fases de validação e institucionalização devem concorrer para a possibilidade de incorporação/elaboração aos conhecimentos dos estudantes determinados saberes que se encontram restritos aos meios de informação do tipo artigos científicos e livros especializados de Matemática Pura e Aplicada [...]. Desse modo, assinalamos o alcance do objetivo (a) e (b) de nosso trabalho[...]” |

**Fonte: Elaborada pelos autores**

O estudo em questão deleita uma discussão a respeito do conhecimento científico existente nos manuscritos analisados, que possibilita o ensino da sequência de Jacobsthal utilizando como teoria de ensino, a Teoria das Situações Didáticas, e como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática. Foram utilizados quatro artigos com anos de publicação de 2017, 2018, 2020 e 2021, nas revistas e/ou portais institucionais descritas na Tabela 4.

No artigo (1) os autores destacam que a utilização de situações no contexto da História da Matemática, aplicando-se as etapas da Teoria das Situações Didáticas formam um caminho definido e eficiente para o ensino da Sequência de Jacobsthal e ressalta ainda a necessidade de uma eficiente Transposição Didática para tornar possível a assimilação e compreensão das propriedades desta Sequência.

Os artigos (2) e (3) enfatizam também a utilização de situações problema em que as resoluções tangenciem a sequência de Jacobsthal, com o objetivo instigar no aluno “*o raciocínio inferencial, por meio da formulação e identificação de definições, teoremas e propriedades atinentes à sequência de Jacobsthal*” (SOUZA, 2020).

Já o artigo (4) destaca o processo de ensino vinculado principalmente nas etapas de validação e institucionalização com o objetivo de mostrar e desenvolver nos alunos a situação necessária para que tenham acesso a conhecimentos presentes em artigos científicos e livros especializados de Matemática Pura e Aplicada.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desta pesquisa o leitor pôde deparar-se com aspectos que giram em torno de um termo em específico o “Ensino da sequência de Jacobsthal” que é o foco da presente revisão integrativa, como também evidenciou aspectos que contextualizam as teorias que fazem parte deste trabalho, Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, além de aspectos matemáticos a respeito da sequência de Jacobsthal.

A presente investigação apresentou como objetivo identificar na literatura científica delimitada por meio de uma Revisão Integrativa de Literatura a produção científica sobre o uso da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da sequência de Jacobsthal com um olhar por meio da metodologia de pesquisa Engenharia Didática e levanta o questionamento de como é possível utilizar os achados teóricos presentes na literatura científica selecionada para evidenciar a importância da Teoria das Situações Didáticas para o aperfeiçoamento do ensino da Sequência de Jacobsthal.

Deste modo, emerge a convicção de que os achados teóricos presentes na literatura nacional, inglesa e espanhola trazem aspectos importantes para aplicação das fases da Teoria das Situações Didáticas para o ensino da sequência de Jacobsthal desde generalização da sequência até aplicações e situações problemas que podem ser contextualizadas e aplicadas na experimentação em sala de aula, assim evidenciando o questionamento levantado na pergunta norteadora desta pesquisa.

O objetivo geral apontado por essa explanação teórica foi alcançado, pois no decorrer desta revisão foram demonstrados manuscritos que tinham como foco o ensino da sequência de Jacobsthal utilizando a Teoria das Situações Didáticas e através da Engenharia Didática constatou-se que existem várias aplicações para o processo de ensino dessa sequência.

Entretanto, entende-se como desafio em relação a esta pesquisa, a escassez de manuscritos que tratam sobre o assunto foco da presente revisão integrativa, uma vez que os achados apesar de sua completude, foram poucos em consideração com o tamanho das perspectivas que podem ser desenvolvidas sobre o assunto vigente.

Por fim, espera-se que o aspecto metodológico, revisão integrativa, apresentado neste manuscrito sirva como parâmetro sobre os conhecimentos atuais a respeito do Ensino da sequência de Jacobsthal com a base na Teoria das Situações Didáticas observado através da Engenharia Didática e a partir deste surgir produções futuras a fim de intensificar o ensino de tal sequência que se mostra útil na assimilação de diversos saberes matemáticos.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A & COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, 3(6). 2008. p. 62-77.

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Editora da Universidade Estadual do Paraná. 2007.

ALVES, F.R.V. Engenharia Didática de 2ª geração com o tema:  $h(x)$ -polinômios de Jacobsthal. **Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista**, 8(3). 2018.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s, t) -Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e *a priori*. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**. 2017. p. 83-106.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Revista de Educação Matemática e Pesquisa**, 18(1), 2016. p. 61-93.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 9(3). (1988). p. 281-308.

BERGUM. E, BENNETT. L, HORADAM. A. F & MOORE. S. D. Jacobsthal polynomials concerning Fibonacci and a conjecture -like matrices. **The Fibonacci Quarterly**. 23(3), 1985. p. 240 – 249. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Scanned/23-3/bergum.pdf>  
Acesso em: 10 de setembro de 2021.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 7(2). 1986, p. 33-116.

CAPCS-Centro de Apoio à Pesquisa no Complexo de Saúde da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. **CAPCS-Uerj**. 2020. Disponível em: <http://www.capcs.uerj.br/voce-sabe-o-que-sao-operadores-booleanos/> Acesso em: 10 de setembro de 2021

CERIN. Z. Formula for Sums of Jacobsthal-Lucas numbers. **International Mathematical Fórum**, 2(40), 2007b, p. 1969 – 1984. Disponível em: [http://www.mhikari.com/imf\[1\]password2007/37-40-2007/cerinIMF37-40-2007.pdf](http://www.mhikari.com/imf[1]password2007/37-40-2007/cerinIMF37-40-2007.pdf)  
Acesso em 30 de setembro de 2021.

CERIN. Z. **Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers**. Journal of Integer Sequences. 10 (5). 2007a.

COOK, C. K. & BACON. M. R. Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satisfying higher order recurrence relations. **Annales Mathematicae et Informaticae**, 41(1). 2013, p. 27 – 39.

DJORDJEVIĆ. G. B. Generalized Jacobsthal Polynomials. **The Fibonacci Quarterly**, 38(3). 2000, p. 239 – 244.

DOUADY, R. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. **Revistas U.C.R.** 1995.

FREY, D. & SELLERS. J. Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices. **Journal of**

*Integer Sequences*, 3(1). 2000, p. 1 – 15.

GOMEZ, P. Ingenieria Didactica en Educación Matemática. **Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano**. 1995, p. 1 – 7.

HORADAM. A. F. Jacobsthal representation polynomials. **Fibonacci Quarterly**, 35(1). 1996, p. 137– 148.

MENDES, K. D. S. SILVEIRA, R. C. C. P. & GALVÃO, C. M. Revisão integrativa: método de pesquisa para a incorporação de evidências na saúde e na enfermagem. **Texto & Contexto - Enfermagem**, 17(4). 2008, p. 758-764.

PAGE, M.J, MCKENZIE, J.E, BOSSUYT, P.M, BOUTRON, I, HOFFMANN, T.C & MULROW C.D.(2021) The PRISMA 2020. **statement: an updated guideline for reporting systematic reviews**, 372(71). doi: 10.1136/bmj.n71

SOUSA, R. C. SILVA, J. G. A, ALVES, F. R. V, FONTENELE, F. C. F & MENEZES, D. B. Teoria das Situações Didáticas e o Ensino Remoto em tempos de pandemia: Uma proposta para o Ensino do conceito de Volume por meio da plataforma Google Meet e o software GeoGebra. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, 2(8), 2021, p. 174-183.

SOUZA, M. T, SILVA, M. D & CARVALHO, R. Revisão Integrativa: O que é e como fazer. **Einstein**, 8(1). 2010, p. 102-6.

SOUZA, T. S. A & ALVES, F. R. V. Engenharia didática como instrumento metodológico no estudo e no ensino da sequência de jacobsthal. **Tear: Revista de Educação Ciência e Tecnologia**, 7(2). 2020.

SOUZA, T. S. A. Sequência generalizada de jacobsthal: uma engenharia didática sobre seu ensino. Instituto federal de educação, ciência e tecnologia do ceará. **Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM**. 2020, p.1-145. Disponível em: <https://mestrado.ifce.edu.br/cursos-de-pos-graduacao/pgecm/producao-e-publicacoes/dissertacoes/> . Acesso em: 12 de outubro de 2021.

TEIXIERA, P. J. M & PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké – FE/Unicamp**, 21(39). 2013,